

Engenharias

PESQUISA OPERACIONAL I

CONTEXTUALIZAÇÃO

Devido às rápidas transformações mercadológicas que ocorrem atualmente buscam-se ferramentas que possam subsidiar as decisões mais complexas desse mundo real. Nessa conjuntura, as técnicas de programação matemática, especificamente a de Programação Linear se destaca, pois permite o desenvolvimento de modelos matemáticos que podem ser implementados em computadores pessoais, pelo uso de planilha eletrônica, e por serem básicos para a compreensão de outros modelos da Programação Matemática.

OBJETIVO GERAL

Utilizar as técnicas de programação matemática para modelagem e suas soluções, além da análise dos resultados de forma teórica e aplicada à problemas das engenharias.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- a) Identificar as características de problemas de otimização;
- b) Representar e modelar sistemas com restrições.
- c) Indicar o uso da abordagem dual em sistemas genéricos;
- d) Reconhecer as principais características de programação linear;
- e) Exemplificar problemas e solução envolvendo programação linear;
- f) Analisar a sensibilidade e inferir em modelos de programação linear;
- g) Modelar e resolver outros problemas de programação matemática.

CONTEÚDOS

UNIDADE 1 - A PESQUISA OPERACIONAL

- 1.1 Histórico, objetivos e metodologia.
- 1.2 O processo de modelagem.
- 1.3 Principais áreas de aplicação.

UNIDADE 2 - PROGRAMAÇÃO LINEAR

- 2.1 Conceitos.
- 2.2 O problema de programação linear (PPL) na forma padrão.
- 2.3 Solução gráfica.
- 2.4 Tipologia de problemas (limitado, ilimitado, viável, inviável, solução única e múltiplas soluções).

UNIDADE 3 - O MÉTODO SIMPLEX

- 3.1 O algoritmo.
- 3.2 Solução Básica Viável.
- 3.3 Melhoria de uma solução básica viável- condições de otimalidade.
- 3.4 Viabilidade da nova solução- mudança de base.
- 3.5 Regras de término do algoritmo.
- 3.6 Obtenção de solução inicial- método das duas fases, método do "big M".
- 3.7 Solução única, múltiplas, nenhuma, problema ilimitado.
- 3.8 Degerescência & convergência.
- 3.9 Informação sobre os principais softwares de programação matemática

UNIDADE 4 - TEORIA DA DUALIDADE.

- 4.1 A noção de limite e a construção do problema dual.
- 4.2 Problemas do primal e dual - forma padrão e variantes.
- 4.3 Relação primal - dual: Teoremas da dualidade fraca, forte e das folgas complementares.
- 4.4 Método dual do simplex - a lógica do método; a definição de solução básica dual viável; iteração - mantendo a viabilidade dual; condições de término do algoritmo.

UNIDADE 5 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

- 5.1 Alteração nos coeficientes da função.
- 5.2 Alteração nos coeficientes do termo independente.
- 5.3 Acréscimo de uma nova restrição ao PPL.
- 5.4 Alteração na matriz dos coeficientes do PPL.
- 5.5 Introdução de uma nova variável no PPL.
- 5.6 Análise pós-otimização

UNIDADE 6 - O PROBLEMA DE TRANSPORTE COMO UM PPL ESPECIAL

- 6.1 Introdução.
- 6.2 O Problema de transportes.

6.3 Informações sobre o problema de transportes a partir do seu dual.

6.4 Um algoritmo para o problema de transportes.

UNIDADE 7 – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

7.1 Características.

7.2 Modelos de Otimização de Programação Linear Inteira

7.3 *Branch and Bound*

7.4 Programação Dinâmica

7.5 Análise por Envoltória de Dados - DEA

ÁLGEBRA LINEAR¹

1 – EQUAÇÕES LINEARES

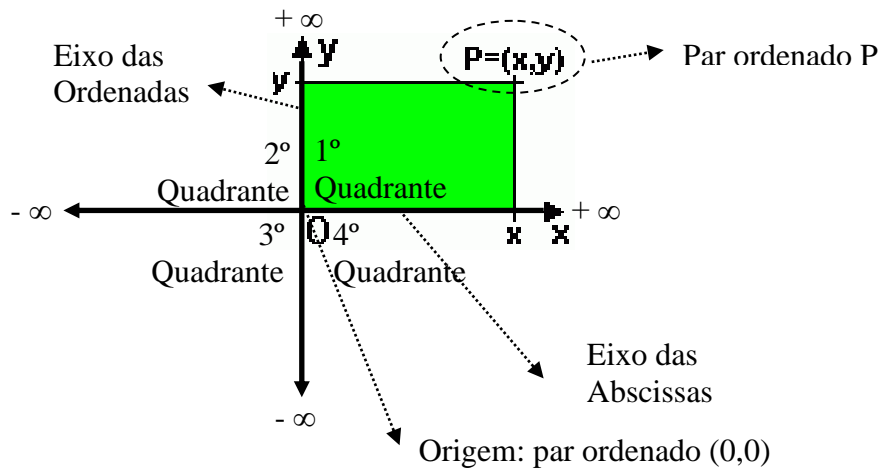
Uma equação linear segue a seguinte forma: $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$

Considerando-se que:

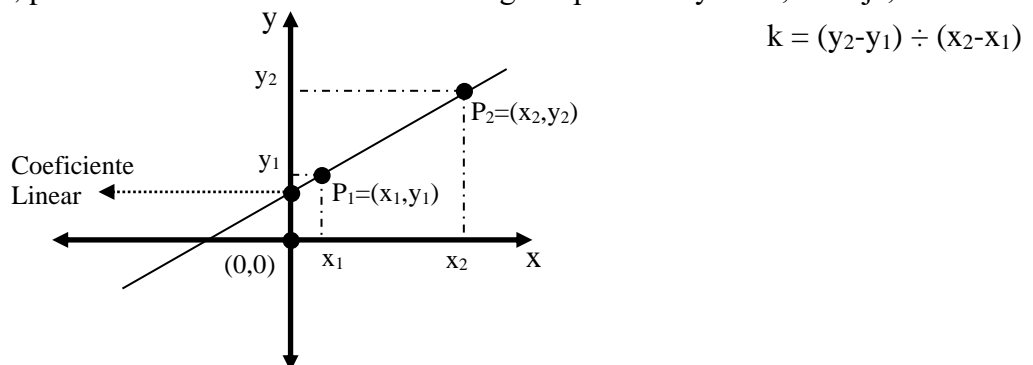
- ✓ x_1, x_2, \dots, x_n são as incógnitas;
- ✓ $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ são os coeficientes (números reais ou complexos);
- ✓ b_1 é o termo independente (número real ou complexo).

Exemplo de equação linear	Exemplos de equações não-lineares
$3x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 20$	$12x + 4y + \sqrt{x} = -4$
$3x - 2y + 6z = 7$	$23x^2 + 4y^2 = 19$
$-2x + 4z = 3t - y + 4$	$6x + 3y - 3zw = 0$

Antes de se tratar os sistemas de equações lineares é importante ver-se como uma reta pode ser observada em um plano cartesiano. A figura a seguir expõe resumidamente um plano cartesiano.



Veja uma reta expressa pela sua equação reduzida $y = k x + w$, sendo k o seu coeficiente angular e w o coeficiente linear. Tomando-se dois pares ordenados, $P_1=(x_1,y_1)$ e $P_2=(x_2,y_2)$, sendo que $x_1 \neq x_2$, que estão sobre a reta, pode-se calcular o seu coeficiente angular por $k = \Delta y \div \Delta x$, ou seja,



¹ Baseado em Haetinger, Claus e Dullius, Madalena, Álgebra Linear e Geometria Analítica, UNIVATES - Centro Universitário - Centro III, Lajeado - Rio Grande do Sul, 2006. Complementos capturados de http://www.expoente.com.br/professores/kalinke/estudo/sistemas_lineares.htm, <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/matrizes/sistemas.htm>, <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/matrizes/determinantes.htm> e <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/eq1g/eq1g.htm>

2- SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots + \vdots + \dots + \vdots = \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\text{com } a_{ij} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Uma solução do sistema anterior é uma n -upla de números $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ que satisfaz simultaneamente as m equações.

Pode-se reescrever este sistema $A \cdot x = b$ por um conjunto de matrizes conforme a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz A , dos **coeficientes das incógnitas**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriz X (vetor), das **incógnitas**:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matriz B (vetor), dos **termos independentes**:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Exemplos:

SPD: Duas retas com ponto de interseção (x,y) .

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

Solução: (3, -2). **Confirmar de forma gráfica**

SPI: Duas retas paralelas e sobrepostas.

$$\begin{cases} 4x + 2y = 100 \\ 8x + 4y = 200 \end{cases}$$

Solução: Existem infinitos pontos que satisfazem a ambas (pertencem as duas retas). **Confirmar de forma gráfica**

SI: Duas retas paralelas.

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

3 – SISTEMA DE INEQUAÇÕES LINEARES

Uma inequação é uma condição onde os dois membros são comparados por um sinal de desigualdade. Esses sinais são:

<	menor
>	maior
≤	menor ou igual
≥	maior ou igual

Salientam-se os seguintes princípios de equivalência:

- ✓ Multiplicando-se os membros de uma inequação por um número positivo, obtém-se uma inequação equivalente.
- ✓ Multiplicando-se os membros de uma inequação por um número negativo, obtém-se uma inequação equivalente desde que se lhe mude o sentido.
- ✓ Somando-se ou subtraindo-se um número em ambos os membros, obtém-se uma inequação equivalente.

Exemplos:

A) Resolva a inequação a seguir:

Passo 1	$2x + 2 < 14$
Passo 2	$2x < 14 - 2$
Passo 3	$2x < 12$
Passo 4	$x < 6$

O conjunto solução é formado por todos os números inteiros positivos menores do que 6, ou seja, $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

B) Para determinar todos os números inteiros positivos considerando-se as duas desigualdades segundo a expressão: $12 < 2x + 2 < 20$, faz-se:

Passo 1	$12 < 2x + 2 < 20$	Equação original
Passo 2	$12 - 2 < 2x + 2 - 2 < 20 - 2$	Subtraímos 2 de todos os membros
Passo 3	$10 < 2x < 18$	Dividimos por 2 todos os membros
Passo 4	$5 < X < 9$	Solução

O conjunto solução é $S = \{6, 7, 8\}$

No caso onde existam duas variáveis pode-se resolver a equação pelo artifício gráfico.

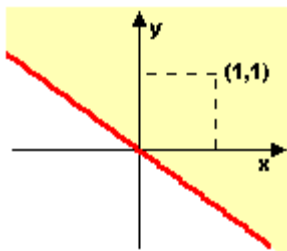
Exemplos:

A) $2x + 3y \geq 0$.

Inicialmente faz-se $2x + 3y = 0$ para traçar-se a reta (em vermelho). Para se obter a área (em amarelo) que representa a inequação verifica-se, por exemplo, se um ponto qualquer, neste caso (1,1), pertence a área.

$2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \geq 0 \dots 5 \geq 0$

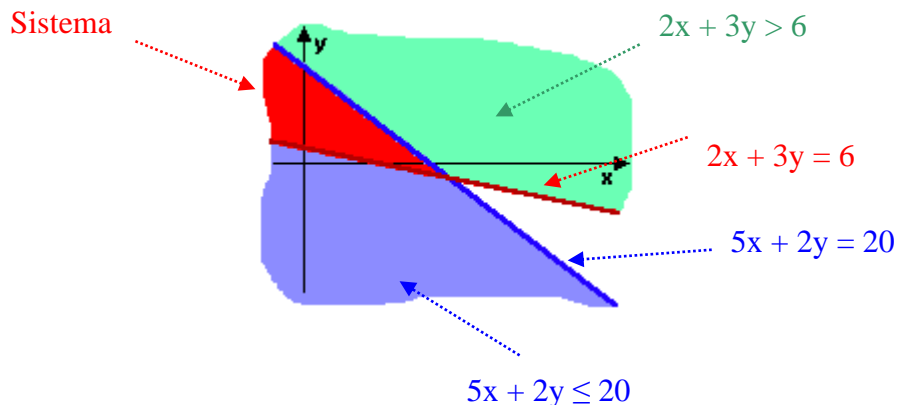
É verdadeiro, então o ponto 1,1 está contido na área da inequação.



B) Para um sistema de inequações dado por:

$$\begin{cases} 2x + 3y > 6 \\ 5x + 2y \leq 20 \end{cases}$$

Chega-se a seguinte solução gráfica:



UNIDADE 1 – A PESQUISA OPERACIONAL

"Existem duas maneiras de aumentar a eficiência de uma loja, empresa, ou indústria. Uma delas requer a melhoria tecnológica, isto é, atualização dos equipamentos, mudança no processo tecnológico, descoberta de novos e melhores tipos de matéria prima. A outra maneira, até hoje muito menos utilizada, envolve melhorias na organização do planejamento e da produção. Isto é, melhorias no processo de distribuição do trabalho entre as máquinas da empresa, distribuição de matéria prima, combustível, entre outros fatores."
(Kantarovich, 1939 in Dantzig, 1963) apud Andrade et al. (2005)

1 – Sinopse Histórica

Durante a Segunda Guerra Mundial, um grupo de cientistas foi convocado na Inglaterra para estudar problemas de estratégia e de tática associados com a defesa do país. O objetivo era decidir sobre a utilização mais eficaz de recursos militares limitados. A convocação deste grupo marcou a primeira atividade formal da Pesquisa Operacional (PO) Montevechi (2000) Lisboa (2002).

Ainda segundo Lisboa (2002), apesar de ser creditada à Inglaterra a origem da PO, sua propagação deve-se principalmente à equipe de cientistas liderada por George B. Dantzig, dos Estados Unidos, convocada durante a Segunda Guerra Mundial. O resultado deste esforço de pesquisa, concluído em 1947, foi a obtenção do *Método Simplex*. De acordo com Bouyssou (2002), em 1950 foi lançada a primeira edição de estudos de PO no mundo, publicação trimestral denominada *Jornal da Sociedade de Pesquisa Operacional*.

O primeiro contato entre universidade e empresa para aplicação da PO foi o da PUC-RJ com as empresas SOCIL e Anhanguera, para o desenvolvimento de programas de minimização de custo de rações para animais, através de Programação Linear. Mas, os principais setores a empregar essa técnica foram os de siderurgia (CSN, Cia. Vale do Rio Doce), eletricidade (Cia Nacional de Energia Elétrica), transportes (FRONAPE), petróleo (PETROBRÁS, ESSO) e telecomunicações, além de grandes projetos e obras estatais. Em função disso, foi criada, em 1968, a Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO) Agosti (2003).

2 – A Pesquisa Operacional

Há várias definições de PO. Andrade (2000) destaca que é uma metodologia administrativa que agrega, em sua teoria, a economia, matemática, estatística e informática. Pode ter aplicabilidade na área gerencial, na obtenção de uma solução ótima por uma visão sistêmica, por intermédio de métodos estatísticos e matemáticos e na construção de modelos e algoritmos computacionais.

De acordo com Montevechi (2000), PO é a preparação científica das decisões, visando a modificação do binômio "Experiência - Intuição" pela "Informação - Racionalidade". Destacando-se o termo "decisão", Agosti (2003) considera-o como um curso de ação, escolhido como o meio mais efetivo para obtenção dos objetivos procurados, ou seja, para resolver o problema detectado.

A PO aplica outras disciplinas científicas na concepção, no planejamento ou na operação de modelos para atingir os seus objetivos. Ela insere objetividade e racionalidade aos processos de tomada de decisão, sem desconsiderar as questões subjetivas que caracterizam os problemas reais.

Utiliza técnicas relacionadas aos campos da programação matemática, da teoria dos grafos e dos conceitos, modelos e técnicas probabilísticas.

As principais áreas da PO são:

- Programação Matemática (Programação: Planejamento de Atividades – Matemática: representação por modelo matemático):
 - Linear;
 - Não-linear;
 - Inteira.
- Modelos de Redes:
 - Transportes;
 - Designação;
 - Redes.
- Sistemas Inteligentes (Inteligência Artificial):
 - Redes Neurais;
 - Lógica Fuzzy;
 - Sistemas Especialistas.
- Teoria das Filas;
- Modelos de Simulação;
- Programação Dinâmica.

Em um estudo de PO ocorrem, normalmente, as seguintes fases (Montevecchi, 2000):

1. **Formulação (ou definição) do problema:** consiste em estudar o sistema e estabelecer, de uma maneira, bem definida o problema a ser considerado. Para isto, vários elementos devem ser determinados: os objetivos a atingir, as restrições que devem ser consideradas, o inter-relacionamento entre o setor a ser estudado e outros, as possíveis linhas de ação alternativas etc.;

2. **Construção do modelo matemático:** um modelo deve especificar as expressões quantitativas para o objetivo e as restrições do problema em termos de suas variáveis de decisão. Existem vários tipos básicos de modelo que serão vistos mais adiante. Antes da construção de um modelo matemático deve-se responder a 4 perguntas:

- 1) Qual é a medida de efetividade do objetivo? Isto é, como será expressa a solução do problema (em reais economizados, unidades vendidas, itens produzidos etc.)
- 2) Quais são os fatores sob controle (variáveis controladas ou de decisão)?
Variáveis controladas: são variáveis que estão sob o controle da administração. Por exemplo, numa programação de produção, a variável de decisão é a quantidade a ser produzida num período.
- 3) Quais são os fatores não controlados (as variáveis não controladas)?
Variáveis não controladas: são variáveis que têm seus valores atribuídos por sistema fora do controle da administração. Por exemplo, o custo de produção, a demanda de produtos e o preço de mercado.
- 4) Quais são as relações entre estes fatores e os objetivos? Isto é, esta relação pode ser expressa em forma de relações matemáticas que constituirão um modelo do problema?

3. **Obtenção de uma solução a partir do modelo:** para modelos matemáticos é dito que a Solução é Ótima. Para modelos de simulação ou heurísticos obtém-se soluções aproximadas do sistema.

4. Teste do modelo e avaliação da solução obtida: o critério indicado para julgar a validade de um modelo deve prever, ou não, os efeitos relativos às alternativas, com suficiente precisão, de maneira a permitir uma satisfatória decisão.

5. Estabelecimento de controle sobre a solução: sempre que uma solução e a estratégia para uma ação futura são aplicadas repetidamente, esta solução deve ser mantida sob controle. Isto é feito identificando-se os parâmetros críticos, determinando-se estatisticamente as variações relevantes nesses parâmetros e finalmente ajustando a solução, e conseqüente, a linha de ação, sempre que uma variação é observada.

6. Implantação da solução: deve-se assegurar que a solução é corretamente transformada em um procedimento operacional, como também, necessita-se corrigir qualquer imperfeição descoberta na solução.

Goldberg *et al.*(2000) destacam que o processo de modelagem depende do espírito crítico do analista, mas resumem que essa modelagem serve para determinar a alocação de recursos limitados (ou restritos) e que podem ser disputados por atividades (ou eventos) alternativas. Eles sugerem ainda que, mesmo que a qualidade da análise dependa da visão do analista, propõe-se, como forma de auxílio a seguinte seqüência para a modelagem de problemas de programação matemática:

a) Tradução das condições do problema:

a.1) definição das variáveis controláveis (de decisão ou controle) e não-controláveis (externa ou de estado);

a.2) elaboração da função-objetivo e do critério de otimização;

a.3) Formalização das restrições do modelo.

b) Construção do modelo:

b.1) elaboração da estrutura de entrada e saída de informações;

b.2) determinação das fórmulas de inter-relação;

b.3) entendimento dos horizontes de tempo.

c) Análise:

c.1) análise da sensibilidade da solução;

c.2) levantamento da precisão dos dados;

c.3) avaliação da estabilidade computacional;

c.4) levantamento de outras especificações para o modelo.

d) Implementação dos resultados.

3 – Problemas de Decisão

Hoje em dia os gestores deparam-se, a todo o momento, com problemas que, na grande maioria das vezes, necessitam ser resolvidos o mais rápido possível. Neste ambiente competitivo, esses problemas reais devem ser analisados baseando-se em metodologias que permitam vislumbrar as vantagens, desvantagens, ou seja, as suas características essenciais, de forma que o tomador da decisão possa comparar as alternativas e decidir pela opção que julgar mais adequada.

Gomes *et al.* (2002) salienta que a palavra “decisão” é formada por “de”, que em latim significa parar, extrair, interromper, que se antepõe à palavra “caedere”, que representa o verbo “cortar”. Considerando o conjunto, “decisão” refere-se a “parar de cortar” ou “deixar fluir”.

O mesmo autor destaca que “decidir” pode ser definido como o processo de colher informações, atribuir importância a elas, posteriormente buscar possíveis alternativas de solução e, depois, fazer a escolha entre as opções disponíveis.

Existem pelo menos dois atores envolvidos no processo decisório: o analista e o tomador da decisão. O primeiro é o responsável pela análise do problema, estruturando-o e identificando todas as interfaces com o sistema problemático. O segundo é o responsável pelo processo decisório, assumindo as responsabilidades pela alternativa escolhida.

Cabe, neste momento, definir algumas questões concernentes a sistemas. Segundo Honigbaum (1993) um sistema é um conjunto de componentes interligados, com vistas a realizar um fim comum.

Já a definição do Prof. Chinol *apud* Honigbaum (1993) ressalta a importância da análise das influências entre os componentes de um sistema: “um sistema é um conjunto de elementos dotados de uma organização e sujeitos, por essa razão, a interações mútuas.

Pereira (2004) unifica em uma definição de sistema os conceitos importantes de outros autores e inclui a necessidade da análise conjunta dos controles dos componentes: “sistema é um conjunto determinado de elementos ou componentes discretos, interconectados ou em interação dinâmica, organizados e agenciados em função de um objetivo, fazendo o referido conjunto, objeto de um controle.”

Um sistema pode ser entendido também como um conjunto de elementos interdependentes e interagentes inseridos em um ambiente; um grupo de unidades combinadas que formam um todo organizado e cujo resultado é maior do que o resultado que as unidades poderiam ter se funcionassem independentemente.

Pontes (1991) destaca que pode haver definições de sistema de acordo com a área de análise. Ele cita Pereira (1988) que define sistema no campo da engenharia como um sistema técnico: “alguma coisa capaz de pôr em execução um processo operacional, onde alguma coisa é operada para produzir alguma coisa”.

Considera-se ambiente ou meio ambiente tudo que não está incorporado à estrutura intrínseca do sistema.

A figura 1 a seguir expõe resumidamente, como é constituído um sistema, os seus componentes e como está inserido no meio ambiente.

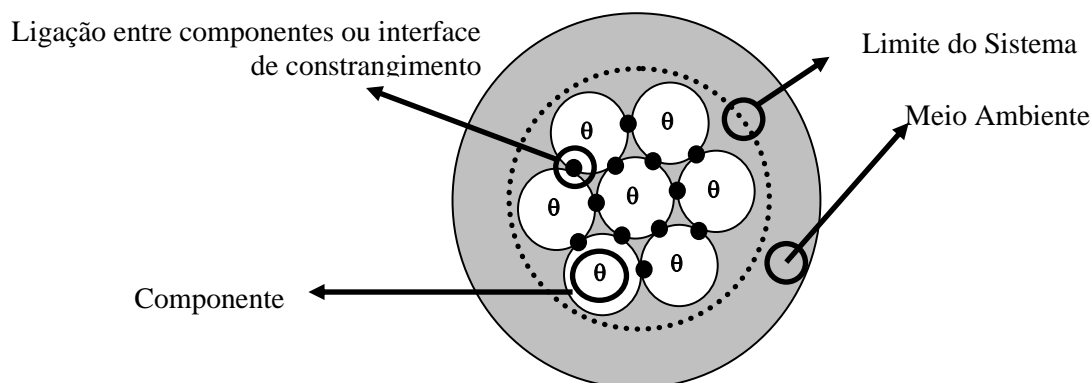


Figura 1 - Representação simbólica de um sistema. Fonte: Sucena *et al.* (2005).

Agosti (2003) salienta que os elementos de um problema de decisão são:

- a) As alternativas: São as possíveis soluções do problema.
- b) Os estados da natureza: São as ocorrências futuras que podem influir sobre as alternativas, fazendo com que elas possam apresentar mais de um resultado.
- c) Os resultados: São as consequências das alternativas. Uma alternativa pode ter mais de um resultado. É preciso selecionar os resultados relevantes para o problema em questão.

As alternativas disponíveis para o tomador de decisão são resultado da avaliação de fatos que compõem um problema, que por intermédio de métodos de organização, transformam-se em informações. Esses passos, quando executados em sequência lógica, redundarão em conhecimento, que quando acumulados em uma base de dados, servirão para subsidiar outras decisões no futuro. A figura 2 apresenta cada etapa dessa sequência até a obtenção do potencial competitivo empresarial.

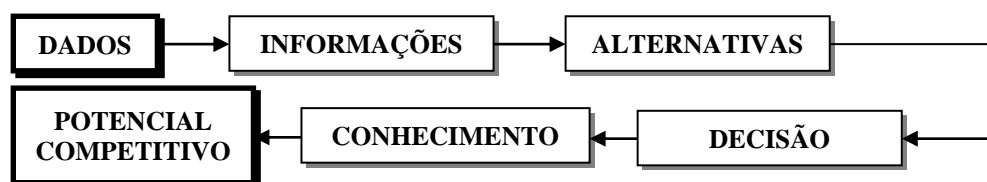


Figura 2 – Passos para a obtenção do potencial competitivo em uma organização

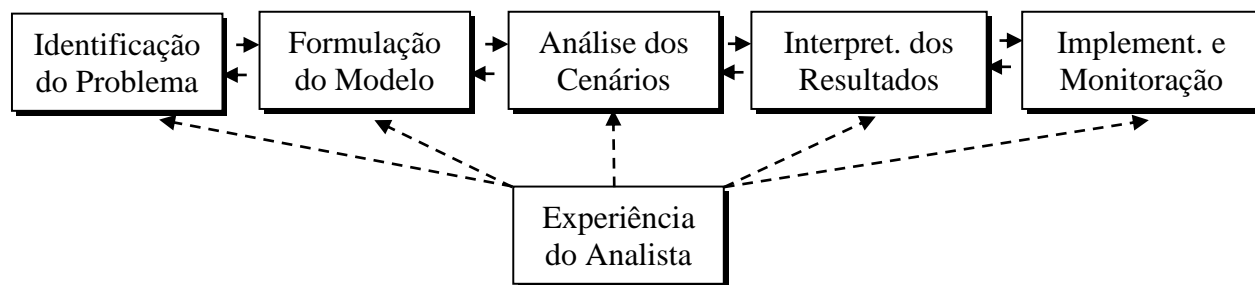
Lachtermacher (2004) relata que no processo de tomada de decisão deve-se considerar, em conjunto, a intuição do decisor e as informações que determinarão as alternativas disponíveis para a solução do problema. Estas informações são resultado do tratamento de dados que representam um “mini mundo“ ou “mundo simbólico”.

A análise do “mini-mundo” auxilia a construção de um modelo que representa um problema real existente, como meio de analisá-lo e compreendê-lo, objetivando apresentar o desempenho que se deseja. Um problema real é um conjunto complexo de variáveis que dita o comportamento deste e que pode ser modelado, para efeito de análise, por uma estrutura simplificada Andrade (2000).

Ainda de acordo com o autor, essas variáveis podem ser categorizadas da seguinte forma:

- De decisão: definidas pelo analista como fornecedoras das informações que assistem à decisão;
- Controlável ou endógena: é o resultado do processamento do modelo;
- Não-controláveis ou exógenas: são valores externos ao modelo que representam as hipóteses assumidas ou as condições que devam ser respeitadas pelo modelo.

O processo de solução de um problema passa pela construção do modelo que o represente. Lachtermacher (2004) expõe este processo com cinco etapas: identificação do problema, formulação do modelo, análise dos cenários, interpretação dos resultados e implementação e monitoração. Cada uma das etapas se liga à subsequente. A posterior retroalimenta a anterior para reavaliação da fase executada. A experiência do analista se encaixa aos dados enviados na retroalimentação, promovendo a melhoria do modelo. Este diagrama pode ser bem entendido observando-se a figura 3.



← - Avaliação da etapa

Figura 3 – Etapas para a solução de problemas. Fonte: Adaptado de Lachtermacher (2004).

De acordo com Andrade (2000), a fase “identificação do problema” passa por três aspectos principais:

- Descrição dos objetivos do estudo que auxiliará a solução do problema;
- Caracterização das alternativas disponíveis que balizarão a decisão;
- Identificação das limitações, restrições e exigências que influenciam o problema.

Na fase “formulação do modelo” é o momento da escolha da técnica mais apropriada para descrever matematicamente o problema. Também nessa fase o analista procura entender como é o problema real para poder “traduzir” a realidade. A confiabilidade do modelo depende da qualidade da descrição do problema, obtida na primeira etapa, e da percepção do analista quanto aos quesitos e atores envolvidos.

As fases “análise dos cenários” e “interpretação dos resultados” servem para validar o modelo, ou seja, verifica-se se o comportamento do modelo representa o problema real, considerando a inexatidão do processo. Geralmente faz-se isso se utilizando dados reais para verificar-se se há veracidade na reprodução do comportamento do problema.

A “implementação e monitoração” do modelo é o momento da sua utilização operacional, isto é, na prática do dia-a-dia. Necessita-se então que o analista possa acompanhar a implementação e as saídas obtidas após o processamento, para que sejam ajustadas as variáveis que estejam degradando os resultados.

Um estudo de PO serve para representar uma situação física por intermédio de um modelo. Um modelo de PO pode ser definido como uma representação idealizada de um sistema organizacional. Este sistema pode já ser existente ou pode ainda ser uma ideia a espera de execução. Montevechi (2000)

De acordo com Ackoff (1974) e Goldberg *et al.* (2000), existem três tipos de modelos que são utilizados na PO:

- Icônicos: representam-se as propriedades dos objetos reais em escalas diferentes. Exemplos: modelos expostos nos planetários do sistema solar (escala reduzida) e modelo de átomo em escala ampliada.
- Analógicos: usam um conjunto de propriedades para representar outro conjunto de propriedades. Exemplo: curvas de nível num mapa análogo às elevações reais e representação de um sistema elétrico por um hidráulico.

- Simbólicos: utilizam letras, números ou outros tipos de símbolos para representar as variáveis e as suas relações. Considera-se esse modelo como abstrato. Eles podem ser representados por relações matemáticas que refletem a estrutura do sistema real.

Andrade (2000) destaca que dependendo da forma de abordagem do analista e da natureza da decisão, os modelos podem ser classificados como:

- Conceituais: estruturam as informações e as fases do problema de forma sequencial e lógica;
- Heurísticos²: são utilizados quando a complexidade do problema não possibilita a utilização de relações matemáticas;
- Simbólicos ou Matemáticos: parte do pressuposto que as variáveis do problema podem ser quantificáveis.

Lachtermacher (2004) distingue três tipos básicos de modelos:

- Físicos: são modelos que apresentam as características físicas do fenômeno ou objeto;
- Análogos: são representações, geralmente gráficas, que representam um fenômeno, tal como mapas e escala de medidores;
- Matemáticos ou simbólicos: onde as grandezas do fenômeno, e as suas relações, são representadas por variáveis de decisão, que na maioria das vezes são quantitativas.

4 - Modelos de Otimização na Programação Matemática

Conceito intuitivo de Otimizar, segundo Lima Jr. *et al.* (2004):
Fiz o melhor que pude...
✓ “melhor” diz respeito à Função-objetivo;
✓ “que pude” refere-se às Restrições à otimização.

Os métodos de otimização, neste caso, são:

a) Programação Linear

É um caso particular dos modelos de programação matemática, pois as variáveis são contínuas e representam o comportamento do modelo (função-objetivo e restrições) de forma linear.

Os problemas de programação linear não apresentam as seguintes expressões: X^n (para $n \neq 1$), $\log_a(X)$ (para qualquer base a) e a^X (para qualquer valor de a).

b) Programação não-linear

Se existe algum tipo de não-linearidade, tanto na função-objetivo quanto nas restrições. Existem as programações matemáticas Côncava, Convexa e Quadrática. É possível transformar os problemas de programação não-linear para linear, melhorando a qualidade do resultado devido à eficiência desses algoritmos.

c) Programação inteira

Se alguma variável não puder assumir valores contínuos, ficando restrita a valores discretos.

²Heurística: Método de solução de problemas indutivo baseado em regras derivadas do senso comum ou da experiência de um modelo teórico da matemática. Fornece uma base geral para a solução de problemas, contrastando com abordagens estritamente algorítmicas, que nunca variam.

UNIDADE 2 – PROGRAMAÇÃO LINEAR

É uma técnica da Pesquisa Operacional utilizada para resolver determinada classe de problemas em que se procura alocar recursos limitados a atividades ou decisões diversas, de maneira ótima (solução ótima). Este tipo de problema aparece frequentemente nos setores de planejamento e operações de indústrias, empresas de transporte, órgãos governamentais etc..

Entende-se por solução ótima àquela, dentre todas as soluções viáveis, que produz o melhor (menor ou maior, dependendo do problema) valor da função-objetivo.

Os três principais grupos de problemas que podem ser resolvidos por Programação Linear são os seguintes:

a) Misturas de ingredientes com composição e preços conhecidos, para atender a determinadas especificações (de composição ou de estoque), a custo mínimo ou lucro máximo. Utilizada para balancear rações para animais, refeições, abastecimento de comunidades ou tropas, utilização parcelada de combustíveis, lubrificantes, fertilizantes e corretivos, defensivos agrícolas, perfumes e cosméticos, ligas metálicas, no auxílio para as indústrias de alimentos etc.

b) Transporte, distribuição ou alocação, em que se procura determinar as quantidades a transportar, segundo as vias alternativas possíveis, a frequência ou períodos de transporte e as especificações quanto a operação levando em conta os custos (fretes, riscos capital empatado, prêmios e multas, embalagem, armazenamento, capacidade dos meios etc.). Entre as áreas de utilização citam-se: abastecimento, distribuição de produtos, transporte de cargas ou pessoas etc..

c) Programas de Produção ou limitação de recursos nos setores agrícolas, industriais ou de serviços, como o seguinte modelo típico: uma empresa oferece várias alternativas de serviços ou pode fabricar ou produzir vários bens; conhecem-se as quantidades de insumos necessários para a produção de uma unidade do bem ou serviço; conhecem-se as restrições do mercado quanto aos limites inferiores e superiores de produção ou demanda do bem ou serviço; conhecem-se as disponibilidades dos insumos por parte da empresa; conhece-se o valor ou lucro unitário dos bens ou serviços a serem produzidos; deseja-se obter o melhor programa de produção que pode ser: maximizar os lucros, maximizar o volume de produção, maximizar ou minimizar o emprego de determinado insumo, minimizar o tempo ocioso de pessoas ou equipamentos etc..

1 – Modelagem na Programação Linear (PL)

Lisboa (2002) destaca que em um modelo matemático são incluídos três conjuntos principais de elementos:

- As variáveis de decisão e parâmetros: variáveis de decisão são as incógnitas a serem determinadas pela solução do modelo. Parâmetros são valores fixos no problema;
- As restrições: considerações sobre as limitações do sistema, o modelo deve incluir restrições que limitam as variáveis de decisão a seus valores possíveis (ou viáveis);
- A função-objetivo: é uma função matemática que define a qualidade da solução em função das variáveis de decisão.

Andrade (2000) destaca que é mais comum a solução de problemas baseando-se na PO utilizarem modelos matemáticos, que podem ser divididos em modelos de simulação e de otimização (solução analítica).

Exemplos de Modelagem

Exemplo 1:

Uma empresa que produz janelas e portas de polietileno, de alta qualidade, utiliza três seções na sua linha de produção:

- 1) Serralharia: produz estruturas de alumínio;
- 2) Carpintaria: produz estruturas de madeira;
- 3) Montagem: monta as portas e janelas.

Devido à redução drástica dos seus lucros, o diretor de produção decidiu reorganizar o seu sistema fabril, propondo produzir, somente, dois produtos que têm melhor aceitação entre os clientes.

São eles:

- ✓ Produto 1: porta de polietileno com estrutura de alumínio.
- ✓ Produto 2: janela grande de polietileno com estrutura de madeira.

A área de marketing concluiu que a empresa poderá vender qualquer dos dois produtos, considerando a capacidade de produção disponível. Como ambos os produtos partilham a seção de montagem, o gerente solicitou ao Departamento de Planejamento e Controle da Produção a solução deste problema.

O PCP para avaliar o problema, procurou os seguintes dados:

- A) Qual é a capacidade de produção, por minuto, de cada seção a ser utilizada na produção de ambos os produtos?
- B) Qual é a capacidade de produção, por minuto, de cada seção a ser utilizada para produzir uma unidade de cada produto?
- C) Quais são os lucros unitários de cada produto?

Os resultados desses questionamentos estão resumidos na tabela a seguir.

Seção	Produto 1 (porta)	Produto 2 (janela)	Capacidade disponível
Serralharia	1	0	4
Carpintaria	0	2	12
Montagem	3	2	18
Lucro unitário (R\$)	3,00	5,00	

Modelagem:

X_1 → Quantidade do produto 1 a se fabricar.

X_2 → Quantidade do produto 2 a se fabricar.

Lucro →	Maximizar $L = 3X_1 + 5 X_2$	Função-objetivo
	sujeito a	
<u>Serralharia</u> →	$X_1 \leq 4$	Restrições de Produção
<u>Carpintaria</u> →	$2X_2 \leq 12$	
<u>Montagem</u> →	$3X_1 + 2X_2 \leq 18$	
	$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$	Restrições Naturais (Produção não-negativa)

Exemplo 2: (Adaptado de Nogueira, 2007)

Uma indústria produz dois tipos de produtos, sendo que cada um consome uma certa quantidade de horas para ser produzido em três máquinas. Os tempos estão expostos na tabela a seguir.

Produto / Tempo na Máquina (h)	A	B	C
1	2	1	4
2	2	2	2

O tempo máximo semanal de uso das máquinas é:

Máquina	Tempo por Semana (h)
A	160
B	120
C	280

O lucro obtido por cada produto é:

Produto	Lucro (R\$)
1	1,00
2	1,50

Quanto se deve fabricar de cada produto, de modo que seja obedecida a capacidade operativa das máquinas, com o maior lucro possível?

Modelagem:

X → Quantidade do produto 1 a se fabricar.

Y → Quantidade do produto 2 a se fabricar.

Função-objetivo (máximo lucro):

$$\text{MAX } R = X + 1,5Y$$

Sujeito a

$$2X + 2Y \leq 160 \rightarrow \text{Restrição de Tempo na Máq.A}$$

$$X + 2Y \leq 120 \rightarrow \text{Restrição de Tempo na Máq.B}$$

$$4X + 2Y \leq 280 \rightarrow \text{Restrição de Tempo na Máq.C}$$

$$X, Y \geq 0 \rightarrow \text{Restrições Naturais (Produção não-negativa)}$$

Exemplo 3: (Adaptado de Nogueira, 2007)

Suponha que para construir uma casa popular por mês, uma construtora necessite de 2 pedreiros e 4 serventes. Para construir um apartamento no mesmo intervalo de tempo, a mesma construtora necessita de 3 pedreiros e 8 serventes. A construtora possui um efetivo total de 30 pedreiros e 70 serventes contratados. A construtora obtém um lucro de R\$ 3.000,00 na venda de cada casa popular e de R\$ 5.000,00 na venda de cada apartamento e toda "produção" da construtora é vendida. Qual é a quantidade ótima de casas populares e apartamentos que a construtora deve construir para que está obtenha lucro máximo.

Qtd. de Funcionários / Tipo de Edificação	Casa	Apart.
Pedreiro	2	3
Servente	4	8

Lucro de cada edificação:

	Casa	Apart.
Lucro (R\$)	3.000,00	5.000,00

Disponibilidade da mão-de-obra:

	Disponibilidade
Pedreiro	30
Servente	70

Modelagem:

Q_1 → quantidade de casas populares construídas;

Q_2 → quantidade de apartamentos construídos.

$$\text{MAX } M = 3.000Q_1 + 5.000Q_2$$

Restrições:

$$2Q_1 + 3Q_2 \leq 30 \rightarrow \text{Restrição de Pedreiros}$$

$$4Q_1 + 8Q_2 \leq 70 \rightarrow \text{Restrição de Serventes}$$

$$Q_1, Q_2 \geq 0 \rightarrow \text{Restrições Naturais (Produção não-negativa)}$$

FAZER Exemplos da apostila UNESA (Eduardo Leopoldino de Andrade): PROBLEMA 1 a 3

Então, tem-se que a representação matemática de um problema de Programação Linear (PL) tem a seguinte forma:

Otimizar a função-objetivo (maximizar ou minimizar): $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Sujeito a (restrições do problema)

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{array} \right.$$

Sendo:

x_j : variáveis de decisão para $j=1,2,\dots,n$;

b_j : quantidade disponível de um determinado recurso para $j=1,2,\dots,m$;

n : quantidade de variáveis de decisão do modelo de PL;

m : quantidade de restrições do modelo de PL;

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$: função-objetivo do modelo de PL;

$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$: restrições do modelo de PL para $j=1,2,\dots,m$.

Conforme citado anteriormente, o termo "linear" significa que todas as funções definidas no modelo matemático que descreve o problema devem ser lineares, isto é, se $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e cada uma das $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, para i de 1 até m , forem funções lineares.

Considerando-se $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ chega-se a seguinte representação matemática (**FORMA PADRÃO**), utilizando-se as restrições, por exemplo, como equações:

$$\text{Min ou Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Sujeito às restrições

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n = b_1$$

$$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n = b_m,$$

Considerando que $x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$

De acordo com Cintra (2007), um problema de programação linear, na forma matricial, tem o seguinte formato:

$$\begin{array}{l} \text{Min } z = cx \\ \text{s.a.} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \rightarrow A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A matriz A contém os coeficientes das restrições e é denominada matriz de restrições, o vetor b contém os coeficientes dos recursos (termos independentes), o vetor c é formado pelos coeficientes da função-objetivo e x é o vetor com as variáveis de controle ou decisão.

O modelo do exemplo 1 pode ser representado, na forma matricial, como se segue:

$$\text{Maximizar } L = 3X_1 + 5 X_2$$

s.a.

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Exercício: Escrever os exemplos de modelagem 2 e 3 na forma de matriz.

Pode-se também escrever um problema de PL na **forma Canônica**:

$$\text{Min } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

Sujeito às restrições

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \geq b_1$$

$$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \geq b_2$$

⋮

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \geq b_m,$$

Considerando que $x_i \geq 0$ para $i=1, 2, \dots, n$.

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

Sujeito às restrições

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \leq b_1$$

$$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \leq b_2$$

⋮

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \leq b_m,$$

Considerando que $x_i \geq 0$ para $i=1, 2, \dots, n$.

Nessas expressões, a_{mn} , b_m e c_n são números reais, x_i ($i=1, 2, \dots, n$) são as variáveis de decisão do problema, n é o número de variáveis de decisão, m é o número de restrições.

A Programação Linear procura os valores de x_i , quando esses valores existirem, de modo a se atingir o máximo ou o mínimo da função-objetivo.

As restrições indicam as limitações de uma maneira geral, sejam elas físicas, de recursos humanos, monetárias, sócio-econômicas etc..

As constantes b_1, b_2, \dots, b_m devem ser positivas e representam o nível máximo que se pode atingir para cada um dos recursos.

2 - Operações para Adequação do Modelo de PL

Após a modelagem de um problema utilizando-se a programação linear, pode-se obter uma estrutura que não esteja adequada. Sendo assim, é viável saber como adequá-la sem perder as propriedades matemáticas do modelo original. As regras para adequação são:

A) Modificação do Critério de Otimização: $\text{Min } Z = -\text{Max}(-Z)$, ou seja, deve-se maximizar $-Z$ e, ao final, tomar o valor ótimo com o sinal trocado.

Exemplo: $\text{Min } Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$ para $\text{Max } -Z = \text{Max } Z' = -c_1 X_1 - c_2 X_2 - \dots - c_n X_n$

B) Eliminação das Variáveis Livres: para variáveis de decisão sem restrição de não-negatividade (variáveis *irrestritas* ou *livres*), como por exemplo X , pode-se introduzir duas novas variáveis não-negativas $X' \geq 0$ e $X'' \geq 0$ e realizar a substituição de variáveis: $X = X' - X''$.

Exemplo:

$$\text{Max } W = 3X_1 + 4X_2$$

Sujeito a

$$5X_1 \leq 15$$

$$3X_2 \geq 3$$

$$X_1 \geq 0 \text{ e } X_2 \text{ livre}$$

X_2 não aparece na restrição natural ou de não negatividade, e por isso, é considerada uma variável livre. Faz-se o seguinte:

$$X_2 = X_2' - X_2''$$

Reescrevendo o modelo de PL tem-se:

$$\text{Max } W = 3X_1 + 4X_2' - 4X_2''$$

Sujeito a

$$5X_1 \leq 15$$

$$3X_2' - 3X_2'' \geq 3$$

$$X_1, X_2', X_2'' \geq 0$$

Obs.: Se existirem duas ou mais variáveis livres podem-se substituí-las utilizando-se uma única variável auxiliar.

Exemplo:

$$\text{Max } W = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3$$

Sujeito a

$$5X_1 \leq 15$$

$$3X_2 \geq 3$$

$$2X_3 \geq 3$$

$$X_1 \geq 0 \text{ e } X_2, X_3 \text{ livres}$$

$$X_2 = X_2' - va \text{ e } X_3 = X_3' - va$$

$$\text{Max } W = 3X_1 + 4(X_2' - va) + 5(X_3' - va)$$

Sujeito a

$$5X_1 \leq 15$$

$$3(X_2' - va) \geq 3$$

$$2(X_3' - va) \geq 3$$

$$X_1, X_2', X_3', va \geq 0 \text{ e } X_2, X_3 \text{ livres}$$

C) Restrições em Igualdade: Uma igualdade pode ser convertida em duas inequações da seguinte maneira:

$$\text{Exemplo: } a_1 X_1 + a_2 X_2 = b \text{ para } a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b \text{ e } a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b$$

D) Restrições do Tipo \geq : podem ser convertidas em restrições do tipo \leq multiplicando-se a inequação por -1.

$$\text{Exemplo: } a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b \text{ para } -a_1 X_1 - a_2 X_2 \leq -b$$

E) Eliminando uma Restrição tipo Inequação (uso dos sinais $>$, \geq , $<$ ou \leq):

Para $<$ ou \leq :

$a_1 X_1 + a_2 X_2 \leq b$ insere-se uma variável auxiliar (neste caso de folga), ficando $a_1 X_1 + a_2 X_2 + A_1 \leq b$, sendo que $F_1 \geq 0$.

Para $>$ ou \geq :

$a_1 X_1 + a_2 X_2 \geq b$ insere-se uma variável auxiliar (neste caso de excesso), ficando $a_1 X_1 + a_2 X_2 - A_1 \leq b$, sendo que $E_1 \geq 0$.

Exemplo:

$$\text{Min } Z = -4X_1 + 5X_2$$

Sujeito a

$$X_1 + 2X_2 = 3$$

$$X_1 - X_2 \geq 5$$

$$X_1 \geq 0$$

A) $\text{Max } Z' = -Z = 4X_1 - 5X_2$

B) Eliminação da variável livre: $X_2 = X_2' - X_2''$

Substituindo no modelo matemático:

$$\text{Max } Z' = -Z = 4X_1 - 5X_2' + 5X_2''$$

Sujeito a

$$X_1 + 2X_2' - 2X_2'' = 3$$

$$X_1 - X_2' + X_2'' \geq 5$$

$$X_1, X_2', X_2'' \geq 0$$

C) Transformando a 1ª restrição de igualdade em duas inequações.

$$\text{Max } Z' = -Z = 4X_1 - 5X_2' + 5X_2''$$

Sujeito a

$$X_1 + 2X_2' - 2X_2'' \geq 3$$

$$X_1 + 2X_2' - 2X_2'' \leq 3$$

$$X_1 - X_2' + X_2'' \geq 5$$

$$X_1, X_2', X_2'' \geq 0$$

D) Transformando as restrições de \geq para \leq :

$$\text{Max } Z' = -Z = 4X_1 - 5X_2' + 5X_2''$$

Sujeito a

$$-X_1 - 2X_2' + 2X_2'' \leq 3$$

$$X_1 + 2X_2' - 2X_2'' \leq 3$$

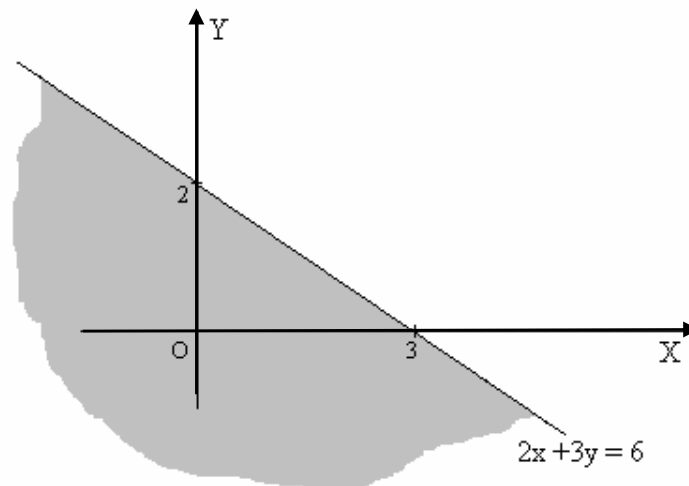
$$-X_1 + X_2' - X_2'' \leq 5$$

$$X_1, X_2', X_2'' \geq 0$$

3 - Solução Gráfica

A solução gráfica é utilizada para solução de problemas de PL simples com duas variáveis de decisão.

Inicialmente cabe lembrar como é a representação de uma inequação. Uma desigualdade pode ser representada em um plano cartesiano por um semi-plano, conforme figura a seguir que expõe a inequação $2x + 3y \leq 6$ (Souza *et al.*, s/d).



Exemplo 1 (Adaptado de Souza *et al.*, s/d):

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 4X_2$$

Sujeito a

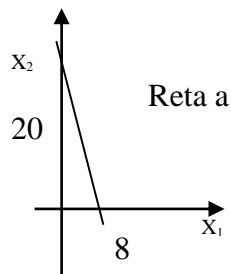
$$2,5X_1 + X_2 \leq 20$$

$$3X_1 + 3X_2 \leq 30$$

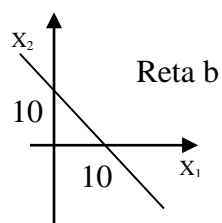
$$X_1 + 2X_2 \leq 16$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

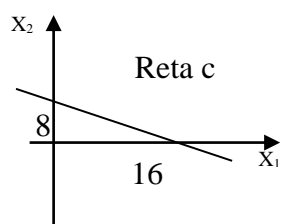
1ª Restrição: $2,5 X_1 + X_2 = 20 \rightarrow$ para $X_2 = 0, X_1 = 20/2,5 = 8 \rightarrow$ para $X_1 = 0, X_2 = 20$



2ª Restrição: $3 X_1 + 3 X_2 = 30 \rightarrow$ para $X_2 = 0, X_1 = 30/3 = 10 \rightarrow$ para $X_1 = 0, X_2 = 10$



3ª Restrição: $X_1 + 2 X_2 = 16 \rightarrow$ para $X_2 = 0, X_1 = 16 \rightarrow$ para $X_1 = 0, X_2 = 16/2 = 8$



Como as restrições deste problema de PL são dadas em forma de desigualdades, então a solução gráfica do conjunto de restrições será um polígono convexo (não necessariamente fechado) que recebe o nome de Região de Soluções Viáveis (R.S.V.). A solução ótima do problema de programação linear será um dos vértices desse polígono.

Um polígono é convexo se, por intermédio de um segmento de reta formado por dois pontos quaisquer dentro do conjunto convexo (R^2), todos os seus infinitos pontos fazem parte deste conjunto.

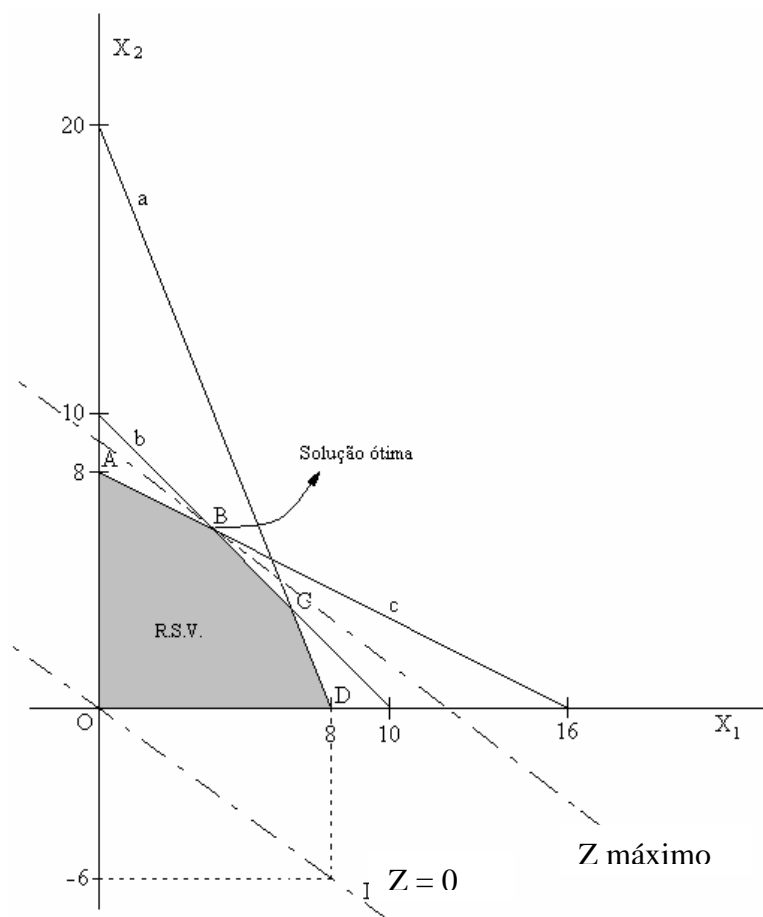
Exemplos:



Para este caso de maximização, deve-se encontrar o ponto ótimo. Começa-se traçando a reta que anula a função-objetivo, ou seja, a reta que passa pela origem ($X_1 = 0, X_2 = 0$ e $Z = 0$) e que corresponde a $Z = 0$, representando a situação mais desfavorável; em seguida procura-se o vértice do polígono pelo qual passa a reta paralela à reta traçada anteriormente, ponto esse que deve ser o mais afastado possível (visto que o problema é de maximização).

As equações de reta que representa $Z = 0$ e as paralelas que se destinam ao vértice mais afastado do polígono convexo são também conhecidas como “equações equipotenciais”.

A solução completa pode ser observada na próxima figura.

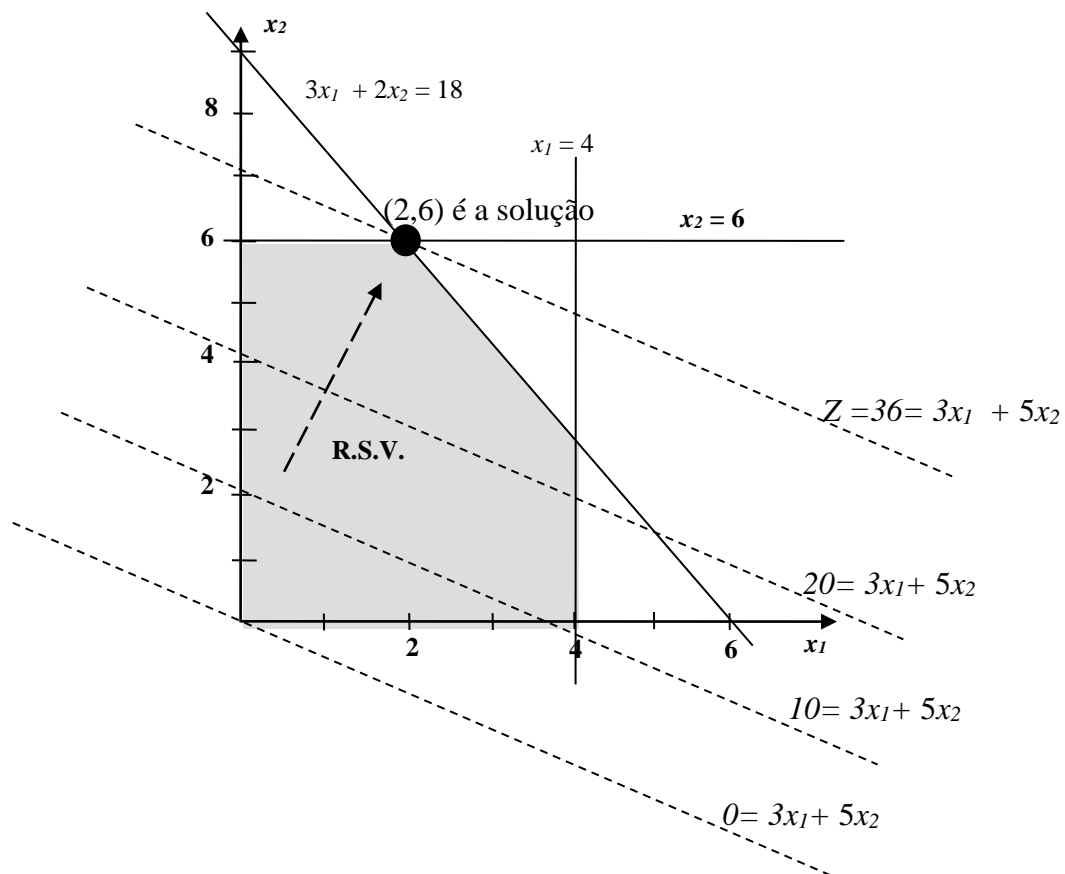


Exemplo 2 da Modelagem (Adaptado de Souza *et al.*, s/d):

Lucro \rightarrow Maximizar $Z = 3X_1 + 5X_2$
sujeito a
Serralheria $\rightarrow X_1 \leq 4$
Carpintaria $\rightarrow 2X_2 \leq 12$
Montagem $\rightarrow 3X_1 + 2X_2 \leq 18$
 $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

- 1) Identificar os valores de (X_1, X_2) que satisfaçam todas as restrições (região de soluções viáveis).
- 2) $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$ (restrição natural) \Rightarrow a solução está no 1º Quadrante.
- 3) $X_1 \leq 4$ (1ª restrição) \Rightarrow a solução está à esquerda ou sobre a reta $X_1 = 4$.
- 4) $2X_2 \leq 12$ (2ª restrição) $\Rightarrow X_2 \leq 6 \Rightarrow$ a solução está abaixo ou sobre a reta $X_2 = 6$.
- 5) $3X_1 + 2X_2 \leq 18$ (3ª restrição) \Rightarrow a solução está abaixo ou sobre a reta $3X_1 + 2X_2 = 18$.
- 6) Traçar a reta $3X_1 + 5X_2 = 0$ e caminhar com outras, em paralelo, até atingir o último ponto (solução ótima) da RSV.

A próxima figura expõe, de forma grafica, os passos anteriores.



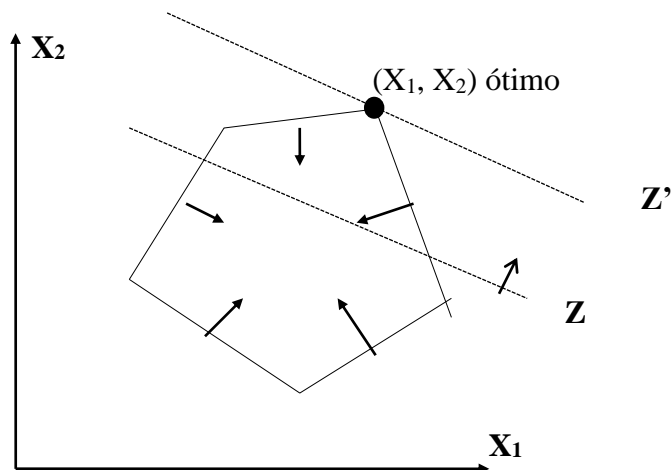
O objetivo da Programação Linear é determinar, entre as soluções viáveis, a que seja “melhor” considerando o resultado da função-objetivo. Se for um problema de minimização, “melhor” representa o menor valor da função-objetivo; se o problema for de maximização, procura-se o maior valor.

Todo problema de Programação Linear parte de alguma hipótese que são assumidas quando se tenta resolvê-los. Quais são (Lachtermacher, 2004):

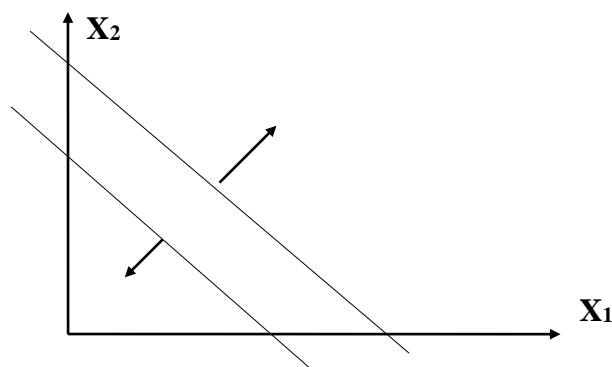
- Proporcionalidade: o valor da função-objetivo é diretamente proporcional ao nível de atividade de cada variável de decisão;
- Aditividade: considera as atividades, representadas pelas variáveis de decisão, do modelo como entidades totalmente independentes, não permitindo que haja interdependência entre as mesmas, isto é, não permitindo a existência de termos cruzados, tanto na função-objetivo como nas restrições;
- Divisibilidade: assume que todas as unidades de atividade possam ser divididas em qualquer nível fracionário, isto é, qualquer variável de decisão pode assumir qualquer valor fracionário;
- Certeza: assume que todos os parâmetros do modelo são constantes conhecidas. Em problemas reais, a certeza quase nunca é satisfeita, provocando a necessidade de análise de sensibilidade dos resultados.

Soluções Possíveis

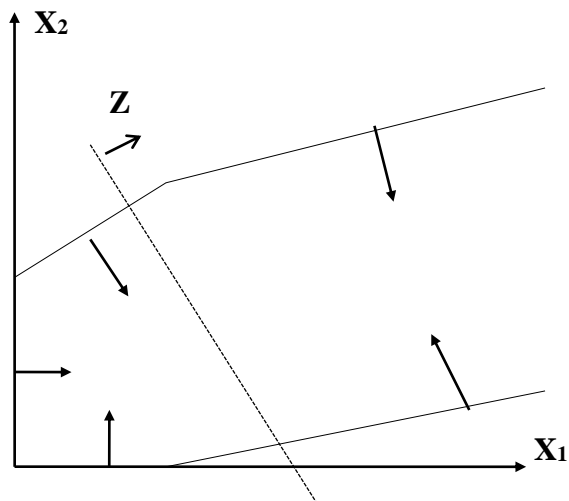
- 1) Solução ótima única e finita: se a solução ótima é finita e única então a solução está em um dos extremos do polígono convexo.



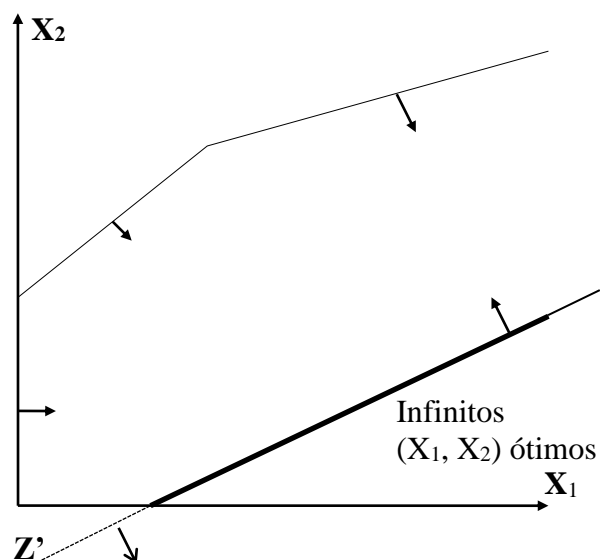
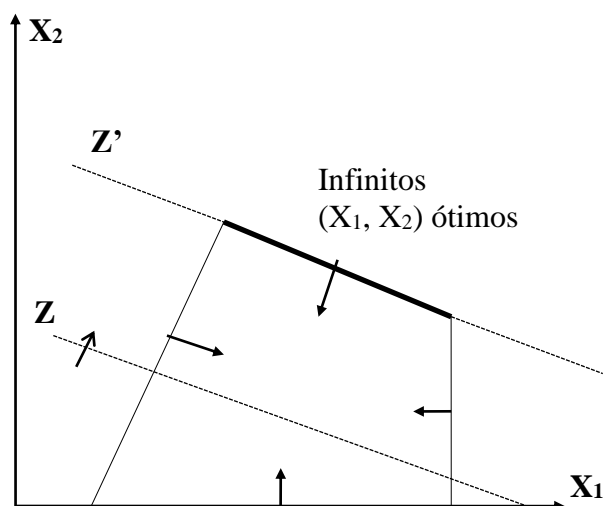
- 2) Não há Solução Viável: quando não se consegue definir uma área que atenda a todas as restrições ao mesmo tempo;



- 3) Solução Ótima Ilimitada: quando a função-objetivo pode crescer indefinidamente, isto é, não há nenhuma restrição que limite o seu crescimento;



- 4) Múltiplas Soluções: quando a função-objetivo recai sobre uma aresta do espaço de solução, isto é, é paralela com uma restrição limitante.



Notar que às vezes uma ou mais restrições não participam da determinação do conjunto de soluções viáveis. Elas são classificadas como redundantes, ou seja, quando há a sua exclusão do conjunto de restrições em um problema de PL, o conjunto das soluções viáveis não se altera.

Existem alguns teoremas que sustentam os estudos sobre programação linear. São eles:

- 1 – O conjunto de todas as soluções viáveis de um modelo de PL é um conjunto convexo.
- 2 - Toda solução compatível básica do sistema linear de um modelo de PL é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis.
- 3 – Se a função-objetivo possui um único ponto ótimo finito, então este é extremo do conjunto convexo de soluções viáveis.
- 4 – Se a função-objetivo assume valor ótimo em mais de um ponto do conjunto de soluções viáveis, então ela assume este valor para pelo menos dois pontos extremos do conjunto convexo e para qualquer combinação convexa desses pontos extremos.

UNIDADE 3 - MÉTODO SIMPLEX – PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO
(baseado em Lisboa, 2002)

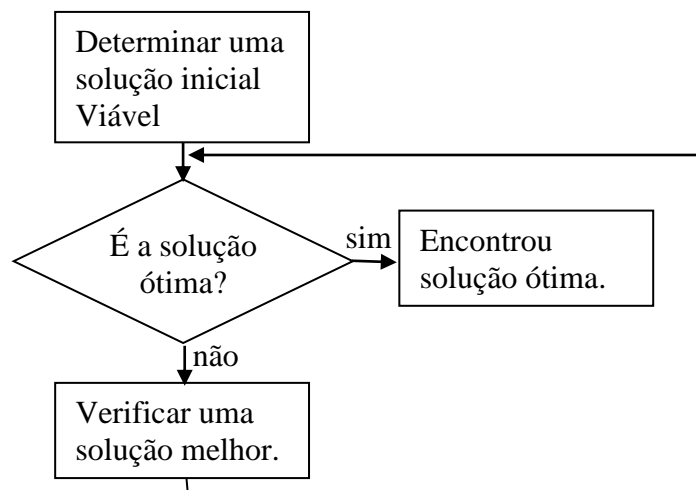
1 - Conceitos

O nome "simplex" está relacionado com o conjunto de restrições lineares que representam geometricamente uma figura chamada simplexo, que é o equivalente aos poliedros no espaço e aos polígonos no plano como citado anteriormente. Esse método pesquisa os vértices do poliedro de restrições.

O método Simplex está fundamentado nos seguintes teoremas:

- O conjunto de todas as soluções viáveis de um modelo de Programação Linear forma um conjunto convexo.
- Toda solução compatível básica do sistema de equações lineares de um modelo de Programação Linear é um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, isto é, do conjunto de convexo de soluções.
- Se a função-objetivo possui um ótimo finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo de soluções viáveis.
- Se a função-objetivo assume o ótimo em mais de um ponto extremo do conjunto de soluções viáveis, então ela toma o mesmo valor para qualquer ponto do segmento da reta que une esses pontos extremos.

Resumidamente, o método Simplex é um algoritmo que permite resolver problemas de Programação Linear. A ideia básica do método Simplex consiste em resolver repetidas vezes um sistema de equações lineares para obter uma sucessão de Soluções Básicas Admissíveis, cada uma "melhor" do que a anterior, até se chegar a uma ótima. Esta rotina está representada na figura a seguir.



Solução Básica: considerando-se um conjunto de m equações linearmente independentes e n incógnitas, onde $n > m$, se define como solução básica a solução para o conjunto de equações em que $(n - m)$ variáveis são feitas iguais a 0 e as restantes são obtidas da resolução do sistema de equações. (dos Santos, 2003)

Engenharias PESQUISA OPERACIONAL I

Exemplo (dos Santos, 2003):

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 2$$

$m = 2$ e $n = 5$.

Cada solução básica terá $(5-2) = 3$ variáveis iguais a 0 que são denominadas variáveis não-básicas. Por exemplo, x_3, x_4 e x_5 . As outras, ou seja, diferentes de zero, são classificadas como variáveis básicas.

Quando em uma solução básica, pelo menos uma das variáveis básicas é igual a 0, entende-se que essa solução é degenerada. Esta variável é chamada de variável básica degenerada.

A quantidade de soluções básicas em um sistema linear é obtida pela seguinte expressão:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Exemplo de solução por tentativas de avaliações das soluções básicas (dos Santos, 2003):

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 60x_2$$

s.a.

$$70x_1 + 70x_2 \leq 4900$$

$$90x_1 + 50x_2 \leq 4500$$

$$2x_1 \leq 80$$

$$3x_2 \leq 180$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\frac{6!}{4! 2!} = 15 \text{ soluções básicas}$$

As 15 soluções básicas possíveis estão expostas a seguir:

nº	Não básicas	Básicas	Condição	Z
1	$x_1 = 0 \ x_2 = 0$	$F_1 = 4900 \ F_2 = 4500 \ F_3 = 80 \ F_4 = 180$	Praticável	0
2	$x_1 = 0 \ F_1 = 0$	$x_2 = 70 \ F_2 = 1000 \ F_3 = 80 \ F_4 = -30$	Impraticável	-
3	$x_1 = 0 \ F_2 = 0$	$x_2 = 90 \ F_3 = 80 \ F_4 = -90 \ F_1 = -1400$	Impraticável	-
4	$x_1 = 0 \ F_3 = 0$	$0 = 80$	Impossível	-
5	$x_1 = 0 \ F_4 = 0$	$F_3 = 80 \ x_2 = 60 \ F_1 = 700 \ F_2 = 1500$	Praticável	3600
6	$x_2 = 0 \ F_1 = 0$	$F_3 = -60 \ F_2 = -1800 \ F_4 = 180 \ x_1 = 70$	Impraticável	-
7	$x_2 = 0 \ F_2 = 0$	$F_3 = -20 \ F_1 = 1400 \ x_1 = 50 \ F_4 = 180$	Impraticável	-
8	$x_2 = 0 \ F_3 = 0$	$F_1 = 2100 \ F_2 = 900 \ x_1 = 40 \ F_4 = 180$	Praticável	800
9	$x_2 = 0 \ F_4 = 0$	$0 = 180$	Impossível	-
10	$F_1 = 0 \ F_2 = 0$	$x_1 = 25 \ x_2 = 45 \ F_3 = 30 \ F_4 = 45$	Praticável	3200
11	$F_1 = 0 \ F_3 = 0$	$x_1 = 40 \ x_2 = 30 \ F_2 = -600 \ F_4 = 90$	Impraticável	-
12	$F_1 = 0 \ F_4 = 0$	$x_1 = 10 \ x_2 = 60 \ F_3 = 60 \ F_2 = 600$	Praticável	3800
13	$F_2 = 0 \ F_3 = 0$	$x_1 = 40 \ x_2 = 18 \ F_1 = 840 \ F_4 = 126$	Praticável	1880
14	$F_2 = 0 \ F_4 = 0$	$x_1 = 16.7 \ x_2 = 60 \ F_3 = 46.7 \ F_1 = -466.6$	Impraticável	-
15	$F_3 = 0 \ F_4 = 0$	$x_1 = 40 \ x_2 = 60 \ F_1 = -2100 \ F_2 = -2100$	Impraticável	-

Como o objetivo é a maximização da função objetivo, verifica-se que a solução básica 12 proporciona o maior valor de Z e é, portanto, a solução ótima.

Este tipo de solução, dependendo do tamanho do modelo, torna-se impraticável. Por isso, a utilização do algoritmo Simplex facilita a análise pela forma analítica quanto a possibilidade de implementação em programa de computador, automatizando-se o processo.

Sendo assim, entende-se que: (dos Santos, 2003)

- ✓ Se um modelo de Programação linear possui uma única solução ótima, então ela é uma solução básica do sistema de equações lineares formado pelas restrições do modelo acrescidas das suas respectivas variáveis de folga.
- ✓ No caso de termos mais de uma solução ótima, teremos sempre uma quantidade infinita de soluções ótimas, pois serão ótimos todos os pontos que unem 2 vértices (pontos extremos) adjacentes, ou seja, todos os pontos de um dos lados do espaço solução.

Para se trabalhar diretamente com o método Simplex, a representação matemática de um problema de Programação Linear deve ser expressa na forma padrão, ou seja, para um problema de maximização tem-se:

- ✓ Todas as restrições devem ser equações;
- ✓ $B_j \geq 0$ sendo $j = 1, 2, \dots, m$;
- ✓ Todas as variáveis de decisão devem ser não-negativas.

O Simplex está calcado na seguinte propriedade: Se uma solução básica é melhor que as suas adjacentes, então ela é a solução ótima. Por isso, resumidamente, as etapas do método Simplex são os expostos a seguir:

Etapa 1: Obter uma solução básica praticável inicial. Esta solução é obtida fazendo-se as variáveis de decisão como variáveis não-básicas, ou seja, iguais a 0. As variáveis básicas serão as variáveis de folga associadas às restrições.

Etapa 2: Dada uma solução básica, testar se ela é melhor que suas adjacentes. Se for, ela será a solução ótima.

Etapa 3: Se não for, ir para a melhor solução básica adjacente e voltar a etapa 2.

2 - SIMPLEX Tabular

Para a utilização do método Simplex tabular (maximização), seguem-se os seguintes passos detalhados (adaptado de Andrade, 2000):

- ✓ **Passo 1:** Introduzir as variáveis de folga, uma para cada desigualdade, transformando-as em igualdades, ou seja, em equações lineares. Observar que essas inequações são do tipo UTILIZAÇÃO DO RECURSO \leq DISPONIBILIDADE. A inserção da variável de folga de RECURSO muda essa inequação para uma equação do tipo UTILIZAÇÃO + FOLGA = DISPONIBILIDADE
- ✓ **Passo 2:** Montar um quadro para os cálculos, colocando os coeficientes de todas as variáveis com os respectivos sinais e, na última linha, incluir os coeficientes da função-objetivo transformada.
- ✓ **Passo 3:** Estabelecer uma solução básica inicial, usualmente atribuindo valor zero às variáveis originais (Variáveis não-Básicas) e achando valores positivos para as variáveis de folga (com Z, formam o conjunto das variáveis básicas).

- ✓ **Passo 4:** Como a próxima variável a entrar na coluna base, escolher a não-básica que oferece, na última linha (a linha Z), a maior contribuição para o aumento da função-objetivo (ou seja, tem o maior valor negativo). Se todas as variáveis que estão fora da coluna base tiverem coeficientes nulos ou positivos nesta linha, a solução atual é ótima. Se alguma dessas variáveis tiver coeficiente nulo, isto significa que ela pode ser introduzida na solução sem aumentar o valor da função-objetivo. Isso quer dizer que temos uma solução ótima, com o mesmo valor da função-objetivo.
- ✓ **Passo 5:** Para escolher a variável que deve deixar a coluna base, deve-se realizar o seguinte procedimento:
 - a) Dividir os elementos da última coluna (termo independente) pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na coluna base. Caso não haja elemento algum positivo nesta coluna, o processo deve parar, já que a solução seria ilimitada.
 - b) O menor quociente indica a equação cuja respectiva variável básica deverá ser anulada, tornando-se variável não-básica.
- ✓ **Passo 6:** Usando operações válidas com as linhas da matriz, transformar o quadro de cálculos em um novo, de forma a encontrar a nova solução básica. A coluna da nova variável básica deverá se tornar um vetor identidade, onde o elemento 1 aparece na linha correspondente à variável que está sendo anulada e 0 nas demais.

Para isso, deve-se aplicar o Método de Gauss-Jordam (pivotamento) como se segue:

- a) O elemento pivô deve ser transformado em valor unitário: todos os elementos da atual linha pivô (linha da variável que deixou a base) são divididos pelo valor do pivô. O resultado dos cálculos forma a primeira linha da nova tabela.
- b) As demais linhas devem ser obtidas seguindo-se a expressão a seguir:

$\text{Novo valor} = [\text{linha pivô na tabela nova} \times (\text{coef. da coluna pivô na tabela antiga} \times -1)] + \text{linha antiga a mudar}$
--

- ✓ **Passo 7:** Verificar se a solução obtida na iteração é a ótima. Se for, deve-se parar o processo de análise, senão deve-se retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

Exemplo 1 (adaptado de Lisboa, 2002):

$$\text{Max } Z = 4x_1 + x_2$$

Sujeito a

$$2x_1 + 3x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Passo 1: Introdução das variáveis de folga.

$$2x_1 + 3x_2 + f_1 = 1$$

$$2x_1 + x_2 + f_2 = 8$$

$$x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$$

Passo 2: Montagem do quadro Simplex.

Função-objetivo Transformada:

$$Z = 4x_1 + x_2 + 0 f_1 + 0 f_2 \text{ para } Z - 4x_1 - x_2 - 0 f_1 - 0 f_2 = 0$$

	Variáveis de folga		Termos Independentes		
Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
	2	3	1	0	12
	2	1	0	1	8
Z	-4	-1	0	0	0

Coeeficientes das Variáveis da Função-objetivo

Obs.: A Linha que representa a Função Objetivo, que aqui está representada na última linha do quadro SIMPLEX, dependendo do autor, pode ser representada em outras posições, não modificando a forma de solução.

Passo 3: Solução Inicial Básica.

Encontra-se a Solução Inicial Básica para montagem do 1º quadro Simplex assumindo-se as variáveis não-básicas (variáveis de decisão) como zero ($x_1 = x_2 = 0$), chegando-se a $f_1 = 12$; $f_2 = 8$ e $Z = 0$.

Variáveis não-Básicas: x_1 e x_2 ($=0$)

Variáveis Básicas: f_1 e f_2 ($\neq 0$)

	Variáveis de folga		Termos Independentes		
Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	2	3	1	0	12
f_2	2	1	0	1	8
Z	-4	-1	0	0	0

Verifica-se que o resultado de Z não é o mais otimizado ($Z = 0$), e sendo assim, necessita-se encontrar uma solução ótima.

Lembrando então, para ratificar se essa é a solução ótima, observa-se o quadro, especificamente as variáveis não-básicas (fora da base) na linha Z:

- 1) Se todos os valores forem positivos ou nulos, a solução é ótima e única;
- 2) Se aparecerem valores positivos e alguns nulos, a solução é ótima, mas não única, pois as variáveis com valores nulos indicam que elas podem ser introduzidas na base sem aumentar o valor da função-objetivo; resumindo, indica que existe outra solução ótima com o mesmo valor da função-objetivo;
- 3) Se aparecer algum valor negativo a solução não é a ótima, devendo-se passar para o próximo passo.

Passo 4: Encontrar a variável não-básica a se tornar positiva. Ela entrará na coluna base.

Qual a variável que, saindo da coluna base, aumentaria mais rapidamente o valor da função-objetivo?

Quanto à variável não-básica a se tornar positiva (que responda a pergunta anterior), deverá ser naquela solução:

- 1) igual a zero;
- 2) ter coeficiente menor ou igual a zero na linha Z;
- 3) possuir na sua coluna pelo menos um coeficiente positivo.

Sendo assim, escolhe-se a variável não-básica que contém o coeficiente mais negativo na linha Z. Neste caso, x_1 .

Passo 5: Encontrar a variável básica que será anulada. Sairá da coluna base.

Para se definir a variável básica (f_1 ou f_2) a ser anulada, deve-se calcular o quociente entre o seu termo independente e o valor da coluna da variável que entrou (x_1), escolhendo a que tiver menor valor não negativo. Neste caso, escolhe-se f_2 .

$$\text{Para } f_1: 12 / 2 = 6$$

$$\text{Para } f_2: 8 / 2 = 4$$

Passo 6: Transformação do quadro.

A linha de f_2 deve refletir agora o valor de x_1

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	2	3	1	0	12
f_2	2	1	0	1	8
Z	-4	-1	0	0	0

Diagrama de anotações:
 - Passo 4: aponta para a coluna x_1 .
 - Coluna Pivô: aponta para a coluna x_1 .
 - Passo 5: aponta para a linha f_2 .
 - Pivô: aponta para o elemento 2 na interseção da linha f_2 e coluna x_1 .
 - Linha Pivô: aponta para a linha f_2 .

No novo quadro cada elemento da linha pivô deve ser dividido pelo pivô.

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	2	3	1	0	12
x_1	$2/2 = 1$	$1/2$	0	$1/2$	$8/2 = 4$
Z	-4	-1	0	0	0

Para anular o coeficiente da linha pivô, transformando-se a coluna pivô em um vetor identidade, devem-se anular os elementos desta coluna. Faz-se:

$$\text{Novo valor} = [\text{linha pivô na tabela nova} \times (\text{coef. da coluna pivô na tabela antiga} \times -1)] + \text{linha antiga a mudar}$$

Ou seja:

$$\text{Novo valor} = [\text{nova linha } x_1 \times (\text{antiga coluna } x_1 \text{ na linha a mudar} \times -1)] + \text{antiga linha } f_1$$

Para a 1ª linha (f_1), multiplica-se a nova linha (x_1) por -2 (verificar que o coeficiente a se anular é 2) e somando-se à linha antiga (f_1), resultando na seguinte tabela:

Engenharias
PESQUISA OPERACIONAL I

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	$[1 (-2)] + 2$ = 0	$[1/2 (-2)] + 3$ = 2	$[0 (-2)] + 1$ = 1	$[1/2 (-2)] + 0$ = -1	$[4 (-2)] + 12$ = 4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
Z	-4	-1	0	0	0

Para a última linha (Z), deve-se proceder da mesma forma, ou seja, multiplicando-se a nova linha (x_1) por 4 (verificar que o coeficiente a se anular é -4) e somando-se à linha antiga (Z), resultando na seguinte tabela:

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	0	2	1	-1	4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
Z	$[1 (4)] + (-4)$ = 0	$[1/2 (4)] + (-1)$ = 1	$[0 (4)] + 0$ = 0	$[1/2 (4)] + 0$ = 2	$[4 (4)] + 0$ = 16

A tabela resultante desta etapa é:

Base	x_1	x_2	F_1	f_2	b
f_1	0	2	1	-1	4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
Z	0	1	0	2	16

Passo 7: Verificar se a nova solução é ótima.

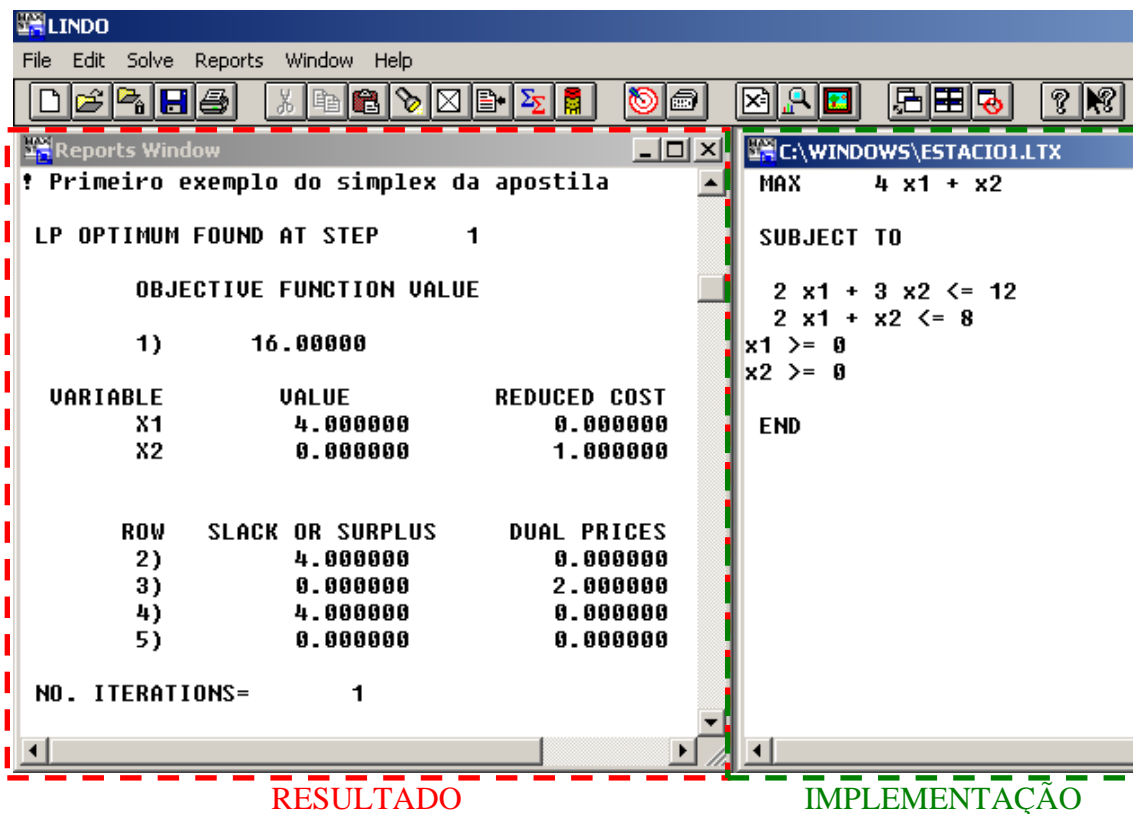
Para verificar se essa solução é a ótima, observam-se as variáveis não-básicas (x_1 e x_2) na linha Z:

- 4) **Se todos os valores forem positivos, a solução é ótima e única.**
- 5) Se aparecerem valores positivos e alguns nulos, a solução é ótima mas não única.
- 6) Se aparecer algum valor negativo a solução não é a ótima, devendo-se passar para o próximo passo.

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	0	2	1	-1	4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
Z	0	1	0	2	16

Sendo assim, $x_1 = 4$; $f_1 = 4$; $x_2 = 0$; $f_2 = 0$; e $Z = 16$.

A próxima figura mostra a implementação (direita) e o resultado (esquerda) exposta pelo programa Lindo (<http://www.lindo.com>)



RESULTADO

IMPLEMENTAÇÃO

Exemplo 2 (adaptado de Lisboa, 2002):

Maximizar $Z = 11 x_1 + 12 x_2$
 sujeito a: $x_1 + 4 x_2 \leq 10000$
 $5 x_1 + 2 x_2 \leq 30000$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Passo 1: Introdução das variáveis de folga.

Maximizar $Z = 11 x_1 + 12 x_2 + 0 f_1 + 0 f_2$
 sujeito a: $x_1 + 4 x_2 + f_1 \leq 10000$
 $5 x_1 + 2 x_2 + f_2 \leq 30000$
 $x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Passo 2: Montagem do quadro Simplex.

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	1	4	1	0	10000
f_2	5	2	0	1	30000
Z	-11	-12	0	0	0

Observar se aparece algum valor negativo como coeficiente da linha Z. Se sim, a solução não é a ótima, devendo-se passar para o próximo passo.

Engenharias PESQUISA OPERACIONAL I

Passos 3, 4 e 5: Primeira Iteração.

- a) Variável a entrar na base: x_2 (coluna com maior valor negativo na última linha * -12 *).
- b) Variável a sair da base: f_1 (entre os quocientes $30000/2$ e $10000/4$, o último é o menor).
- c) Dividir a linha pivô pelo pivô (4).
- d) Fazer: Novo valor = [linha pivô . (coef. coluna pivô . -1)] + coeficiente atual da linha a mudar

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	1	4	1	0	10000
f_2	5	2	0	1	30000
Z	-11	-12	0	0	0

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	B
x_2	1/4	4/4=1	1/4	0/4=0	10000/4=2500
f_2	[1/4 (-2)] + 5	[1 (-2)] + 2	[1/4 (-2)] + 0	[0 (-2)] + 1	[2500 (-2)] + 30000
Z	[1/4 (12)] -11	[1 (12)] -12	[1/4 (12)] + 0	[0 (12)] + 0	[2500 (12)] + 0

Nova tabela após a primeira iteração:

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	1/4	1	1/4	0	2500
f_2	9/2	0	-1/2	1	25000
Z	-8	0	3	0	30000

Observar se aparece algum valor negativo como coeficiente da linha Z. Se sim, a solução não é a ótima, devendo-se passar para o próximo passo.

Passos 3, 4 e 5: Segunda Iteração.

- a) Variável a entrar na base: x_1 (coluna com maior valor negativo na última linha * -8 *).
- b) Variável a sair da base: f_2 (entre os quocientes $2500/(1/4)$ e $25000/(9/2)$, o último é o menor).
- c) Dividir a linha pivô pelo pivô (9/2).
- d) Fazer: Novo valor = [linha pivô . (coef. coluna pivô . -1)] + coeficiente atual da linha a mudar

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	1/4	1	1/4	0	2500
f_2	9/2	0	-1/2	1	25000
Z	-8	0	3	0	30000

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	[1.(-1/4)] + 1/4 = 0	[0.(-1/4)] + 1 = 1	[-1/9.(-1/4)] + 1/4 = 5/18	[2/9.(-1/4)] + 0 = -2/36	[50000/9.(-1/4)] + 2500 = 10000/9
x_1	(9/2)/(9/2) = 1	0/(9/2) = 0	-1/2/(9/2) = -1/9	1/(9/2) = 2/9	25000/(9/2) = 50000/9
Z	[1. (+8)] - 8 = 0	[0. (+8)] + 0 = 0	[-1/9. (+8)] + 3 = 19/9	[2/9. (+8)] + 0 = 16/9	[50000/9. (+8)] + 30000 = 670000/9

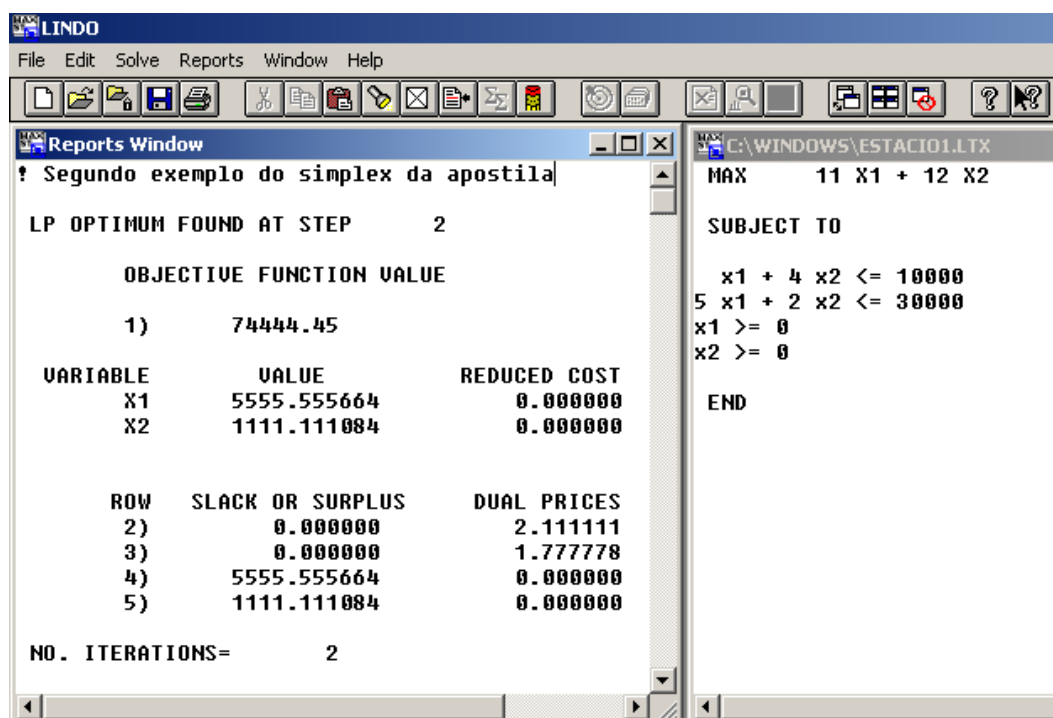
Nova tabela após a segunda iteração:

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	0	1	5/18	-2/36	10000/9
x_1	1	0	-1/9	2/9	50000/9
Z	0	0	19/9	16/9	670000/9

Sendo assim, $x_1 = 50000/9 = 5555,56$; $f_1 = 0$; $x_2 = 10000/9 = 1111,11$; $f_2 = 0$; e $Z = 670000/9 = 74444,44$.

Observar se aparece algum valor negativo como coeficiente da linha Z: não, e sendo assim, como aparecerem valores nulos, a solução é ótima.

A próxima figura mostra a implementação (direita) e o resultado (esquerda) exposta pelo programa Lindo (<http://www.lindo.com>)



RESULTADO

IMPLEMENTAÇÃO

Exercício: Fazer pelo método Simplex os exercícios de modelagem e de solução gráfica.

3 - Problema de Degeneração

Lembrando-se do que foi tratado anteriormente, quando em uma solução básica, pelo menos uma das variáveis básicas é igual a 0, entende-se que essa solução é degenerada. Esta variável é chamada de variável básica degenerada (VBD).

A saída de uma VBD provoca o aparecimento de outra VBD na próxima solução, sem alteração do valor da função objetivo. Esse acontecimento indica que existe, no mínimo, uma restrição redundante.

Uma restrição é dita redundante quando a sua exclusão do modelo não altera o conjunto de soluções viáveis deste. É uma restrição que não participa da determinação do conjunto de soluções viáveis. É quando existe outro modelo sem essa restrição com a mesma solução ótima.

O exemplo a seguir apresenta um caso de VBD.

Maximizar $Z = 3x_1 + 9x_2$
 Sujeito a
 $x_1 + 4x_2 \leq 8$
 $x_1 + 2x_2 \leq 4$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	1	4	1	0	8
f_2	1	2	0	1	4
Z	-3	-9	0	0	0

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
f_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
Z	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
x_1	1	0	-1	2	0
Z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18

4 – Variáveis Artificiais

Como se sabe para se usar o SIMPLEX será necessário passar o modelo para forma PADRÃO e, como tal, necessita transformar todas as restrições “ \leq ” em igualdades com a inclusão de variáveis de folga.

A obtenção da solução básica inicial é simples quando se tem as restrições do modelo como desigualdades “ \leq ”, como se notou nos tópicos anteriores.

Mas quando existem restrições com desigualdades “ \geq ”, aparecem variáveis de excesso, com coeficiente -1, em cada restrição, não permitindo uma solução básica compatível.

Verifique o que acontece com o próximo modelo de PL.

Maximizar $Z = 6x_1 - x_2$
 Sujeito a
 $4x_1 + x_2 \leq 21$
 $2x_1 + 3x_2 \geq 13$
 $x_1 - x_2 = -1$
 $x_1, x_2 \geq 0$

Observando-se o modelo anterior pode notar que a 2ª e 3ª restrições apresentam desigualdade “ \geq ” e igualdade, respectivamente.

Nos casos de desigualdade “ \geq ” precisa se inserir uma variável de excesso, negativa, na respectiva restrição, não se permitindo a obtenção de solução básica admissível, pois a solução inicial, no exemplo anterior, teria como resultado a variável de excesso da segunda restrição igual a -13, violando a restrição natural (variáveis ≥ 0).

Para solucionar esse problema pode-se incluir uma variável artificial não negativa em cada restrição com desigualdade “ \geq ” e, também, nos casos de igualdade. Cabe ressaltar que essa variável não pertence ao modelo original.

Para se garantir uma solução básica admissível a seguir serão apresentados dois métodos: duas fases e Big-M.

5 - Duas Fases

O método está estruturado em duas fases, que são:

Fase I:

Em cada desigualdade “ \geq ” subtrai-se a variável de excesso e adiciona-se uma variável artificial não negativa. Para cada igualdade introduzir uma variável artificial não negativa. A nova função objetivo artificial é obtida somando os coeficientes das variáveis artificiais nas restrições onde elas existirem.

Cria-se um modelo de PL artificial, onde a função objetivo é dada por minimizar (sempre minimizar....) $Q^a(x) = \sum_i x_i^a$, ou seja, a soma das variáveis artificiais adicionadas ao modelo, sendo $x_i^a \geq 0 \forall i$, onde o menor valor possível dado por $x_i^a = 0 \forall i$. Dessa forma se garante uma solução básica inicial.

Resolve-se o modelo de PL usando o SIMPLEX, considerando-se os seguintes resultados:

- ✓ Se o valor da função objetivo artificial resultar em diferente de 0, então o problema de PL não tem solução viável, ciente que pelo menos uma variável artificial diferente de 0 significa que a restrição original não foi satisfeita.
- ✓ Se o valor da função objetivo artificial resultar em 0 foi obtida uma solução básica do problema original passando para próxima fase, desprezando-se as variáveis artificiais e voltando a função objetivo original.

Fase II:

Usando os resultados da Fase I deve-se buscar a solução básica inicial. Retiram-se as variáveis artificiais e abandona-se $Q^a(x)$, trabalhando com a função objetivo original.

Exemplo 1:

Fase 1: Maximizar $Z = 6x_1 - x_2$
Sujeito a

$$4x_1 + x_2 \leq 21$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 13$$

$$x_1 - x_2 = -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Colocando na forma PADRÃO pela inclusão das variáveis de folga e de excesso, além de transformar todos os termos independentes (b_i) em positivos.

Minimizar $Z - 6x_1 + x_2 = 0$
 Sujeito a

$$4x_1 + x_2 + f_1 = 21$$

$$2x_1 + 3x_2 - f_2 = 13$$

$$-x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$$

Inserir as variáveis artificiais nas restrições onde existam “=” ou “≥”.

Minimizar $Z - 6x_1 + x_2 = 0$
 Sujeito a

$$4x_1 + x_2 + f_1 = 21$$

$$2x_1 + 3x_2 - f_2 + f_{a1} = 13$$

$$-x_1 + x_2 + f_{a2} = 1$$

$$x_1, x_2, f_1, f_2, f_{a1}, f_{a2} \geq 0$$

Esse modelo de PL é denominado relaxado ou artificial.

	x1	x2	f1	f2	fa1	fa2	b
f1	4	1	1	0	0	0	21
fa1	2	3	0	-1	1	0	13
fa2	-1	1	0	0	0	1	1
Z	-6	1	0	0	0	0	0

Variáveis não básicas: x_1 , x_2 e f_2 iguais a zero;

Variáveis básicas: $f_1=21$; $fa_1=13$; $fa_2=1$

Montando a função objetivo com as variáveis artificiais.

Minimizar $Z_a = f_{a1} + f_{a2}$

Onde:

$$f_{a1} = 13 - 2x_1 - 3x_2 + f_2$$

$$f_{a2} = 1 + x_1 - x_2$$

Assim $Z_a = 14 - x_1 - 4x_2 + f_2$

$$-x_1 - 4x_2 + f_2 = -14 + Z_a$$

O novo modelo de PL artificial é:

	x1	x2	f1	f2	fa1	fa2	b
f1	4	1	1	0	0	0	21
fa1	2	3	0	-1	1	0	13
fa2	-1	1	0	0	0	1	1
Za	-1	-4	0	1	0	0	-14
Z	-6	1	0	0	0	0	0

Deve-se então aplicar o Simplex até zerar as variáveis artificiais ($fa1 = fa2 = 0$), obtendo assim uma solução factível para o modelo de PL inicial.

	x1	x2	f1	f2	fa1	fa2	b
f1	4	1	1	0	0	0	21
fa1	2	3	0	-1	1	0	13
fa2	-1	1	0	0	0	1	1
Za	-1	-4	0	1	0	0	-14
Z	-6	1	0	0	0	0	0

A coluna “x2” é a coluna pivot, indicando que x2 entrará na base.

Para verificar quem sai da base deve-se avaliar o menor valor entre 21/1, 13/3 e 1/1. fa2 sairá da base.

A nova tabela SIMPLEX ficará:

	x1	x2	f1	f2	fa1	fa2	b
f1	5	0	1	0	0	-1	20
fa1	5	0	0	-1	1	-3	10
x2	-1	1	0	0	0	1	1
Za	-5	0	0	1	0	4	-10
Z	-5	0	0	0	0	-1	-1

A coluna “x1” é a coluna pivot, indicando que x1 entrará na base.

Para verificar quem sai da base deve-se avaliar o menor valor entre 20/5 e 10/5. fa1 sairá da base.

A nova tabela SIMPLEX ficará:

	x1	x2	f1	f2	fa1	fa2	b
f1	0	0	1	1	-1	2	10
x1	1	0	0	-1/5	1/5	-3/5	2
x2	0	1	0	-1/5	1/5	2/5	3
Za	0	0	0	0	1	1	0
Z	0	0	0	-1	1	1	9

As variáveis artificiais fa1 e fa2 não são básicas e, portanto, são iguais a zero. Isso indica que existe solução factível para o modelo de PL inicial. Assim, $Za=0$, como pode-se comprovar no quadro.

Fase 2:

	x1	x2	f1	f2	b
f1	0	0	1	1	10
x1	1	0	0	-1/5	2
x2	0	1	0	-1/5	3
Z	0	0	0	-1	9

A coluna “f2” é a coluna pivot, indicando que f2 entrará na base.

Para verificar quem sai da base não é necessário comparar o menor valor, pois o único possível a ser testado é 10/1.

f1 sairá da base.

	x1	x2	f1	f2	b
f2	0	0	1	1	10
x1	1	0	1/5	0	4
x2	0	1	1/5	0	5
Z	0	0	1	0	10

A solução final é: $x_1=4$; $x_2=5$; $f_2=10$; $f_1=0$.

Como $Z = 6x_1 - x_2$ tem que $Z=19$.

6 – Método das Penalidades (“big-M”)

Uma alternativa ao método das duas fases é o “big-M”. Para se garantir que as variáveis artificiais se anulem na solução final, pois não pertencem ao modelo original, utiliza-se a função objetivo original com a adição de um termo **-M** (valor muito grande – *big-M*) que penaliza fortemente as variáveis artificiais. Assim, enquanto as variáveis artificiais não se anularem a função não atingirá o máximo possível.

Para usar este método big-M devem-se seguir os seguintes passos:

1 - Acrescentam-se as variáveis de excesso e de folga nas restrições do tipo “ \geq ” ou “ \leq ”, respectivamente, para torná-las equações;

2 - No caso de restrições “ \geq ” ou “ $=$ ” e $b_i \geq 0$, adiciona-se, para cada restrição, uma variável artificial, ocorrendo, por isso, a violação das dessas restrições. Esta violação é contornada fazendo-se com que estas variáveis artificiais sejam iguais à zero na solução final. Isto é feito atribuindo-se uma penalidade (coeficiente) M muito grande para estas variáveis artificiais na função objetivo. A penalidade será então “-M” para maximização, sendo $M > 0$;

3 – Devem-se substituir as variáveis artificiais da função objetivo pelo seu valor tirado das equações restritivas onde aparecem;

4 – Aplica-se o SIMPLEX.

Obs: Se a variável artificial for diferente de zero na solução final, o problema não tem solução.

Exemplo:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & Z = 6x_1 + 8x_2 \\ \text{Sujeito a} \quad & 30x_1 + 20x_2 \leq 300 \\ & 5x_1 + 10x_2 \leq 110 \\ & x_1 \geq 6 \\ & x_2 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Colocando na forma PADRÃO pela inclusão das variáveis de folga.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & Z = 6x_1 + 8x_2 + 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 \\ \text{Sujeito a} \quad & 30x_1 + 20x_2 + f_1 = 300 \text{ (VARIÁVEL DE FOLGA)} \\ & 5x_1 + 10x_2 + f_2 = 110 \text{ (VARIÁVEL DE FOLGA)} \\ & x_1 - f_3 = 6 \text{ (VARIÁVEL DE EXCESSO)} \\ & x_2 - f_4 = 4 \text{ (VARIÁVEL DE EXCESSO)} \\ & x_1, x_2, f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Repare que dessa forma a solução inicial básica será $f_1 = 300$, $f_2 = 110$, $f_3 = -6$ e $f_4 = -4$, sendo que f_3 e f_4 violam a restrição natural, tornando a solução inadmissível.

Inserir as variáveis artificiais nas restrições onde existam “=” ou “ \geq ” no modelo original.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & Z = 6x_1 + 8x_2 + 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 - Mf_{a1} - Mf_{a2} \\ \text{Sujeito a} \quad & 30x_1 + 20x_2 + f_1 = 300 \\ & 5x_1 + 10x_2 + f_2 = 110 \\ & x_1 - f_3 + f_{a1} = 6 \\ & x_2 - f_4 + f_{a2} = 4 \\ & x_1, x_2, f_1, f_2, f_3, f_4, f_{a1}, f_{a2} \geq 0 \end{aligned}$$

Esse modelo de PL é denominado relaxado ou artificial.

	x1	x2	f1	f2	f3	f4	fa1	fa2	b
f1	30	20	1	0	0	0	0	0	300
f2	5	10	0	1	0	0	0	0	110
fa1	1	0	0	0	-1	0	1	0	6
fa2	0	1	0	0	0	-1	0	1	4
Z	-6	-8	0	0	0	0	M	M	0

As variáveis básicas: $f_1=300$; $f_2=110$; $fa_1=6$ e $fa_2=4$, ficando a função objetivo como

Engenharias PESQUISA OPERACIONAL I

$$Z = 6.0 + 8.0 + 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 - 6M - 4M = -10M$$

Para se anular os coeficientes das variáveis artificiais faz-se necessário multiplicar por $-M$ as equações onde aparecem as variáveis artificiais, ou seja, a terceira e quarta restrições. O resultado deve ser adicionado a equação da função objetivo.

fa1	-M	0	0	0	M	0	-M	0	-6M
fa2	0	-M	0	0	0	M	0	-M	-4M
Soma fa1+fa2	-M	-M	0	0	M	M	-M	-M	-10M
Z	-6	-8	0	0	0	0	M	M	0
Novo Z = Z + soma fa1_fa2	-6-M	-8-M	0	0	M	M	0	0	-10M

Remontando o quadro SIMPLEX, chega-se a:

	x1	x2	f1	f2	f3	f4	fa1	fa2	b
f1	30	20	1	0	0	0	0	0	300
f2	5	10	0	1	0	0	0	0	110
fa1	1	0	0	0	-1	0	1	0	6
fa2	0	1	0	0	0	-1	0	1	4
Novo Z	-6-M	-8-M	0	0	M	M	0	0	-10M

Quem entra na base? x2

Quem sai da base? 300/20, 110/10, 4/1, ou seja, fa2 (4/1)

	x1	x2	f1	f2	f3	f4	fa1	fa2	b
f1	30	0	1	0	0	20	0	-20	220
f2	5	0	0	1	0	10	0	-10	70
fa1	1	0	0	0	-1	0	1	0	6
x2	0	1	0	0	0	-1	0	1	4
Novo Z	-6-M	0	0	0	M	-8	0	8+M	32-6M

Quem entra na base? x1

Quem sai da base? 220/30, 70/5, 6/1, ou seja, fa1 (6/1)

	x1	x2	f1	f2	f3	f4	fa1	fa2	b
f1	0	0	1	0	30	20	-30	-20	40
f2	0	0	0	1	5	10	-5	-10	40
x1	1	0	0	0	-1	0	1	0	6
x2	0	1	0	0	0	-1	0	1	4
Novo Z	0	0	0	0	-6	-8	6+M	8+M	68

Quem entra na base? f4

Quem sai da base? 40/20, 40/10 ou seja, f1 (40/20)

	x1	x2	f1	f2	f3	f4	fa1	fa2	b
f4	0	0	0,05	0	1,50	1	-1,50	-1,00	2
f2	0	0	-0,50	1	-10	0	10	0	20
x1	1	0	0	0	-1	0	1	0	6
x2	0	1	0,05	0	1,50	0	-1,50	0	6
Novo Z	0	0	0,04	0	6	0	-6+M	M	84

Obteve-se nessa iteração a solução ótima, pois os coeficientes das variáveis não básicas são não negativos, com a seguinte resposta:

$x_1 = 6$; $x_2 = 6$; $f_1 = 0$; $f_2 = 20$; $f_3 = 0$; $f_4 = 2$; **$fa_1 = fa_2 = 0$** ; $K = 84$

UNIDADE 4 - TEORIA DA DUALIDADE

1 – Conceitos

A Análise de Sensibilidade dos Coeficientes das Restrições pode ser feita por intermédio da avaliação da Dualidade.

Os problemas de Programação Linear podem ser de duas formas: o primal e o dual. Como os dois tipos estão relacionados, a partir da solução ótima de um dos tipos, pode-se obter a solução ótima do outro.

O tipo Dual disponibiliza informações sobre questões econômicas intrínsecas de um problema de programação linear.

As duas formas estão exemplificadas no próximo quadro, observando-se que as variáveis y são Duais:

PRIMAL	DUAL
$\begin{aligned} \text{Max } Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ \text{sujeito a} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &\leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &\leq b_3 \\ x_j &\geq 0 \forall j = 1, 2 \text{ e } 3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Min } W &= b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 \\ \text{sujeito a} \\ a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 &\geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 &\geq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 &\geq c_3 \\ j_j &\geq 0 \forall j = 1, 2 \text{ e } 3 \end{aligned}$

Os dois modelos genéricos, a seguir, representam, respectivamente, o tipo Primal e o Dual.

PRIMAL	DUAL
$\begin{aligned} \text{Max } Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.a} \\ \sum a_{ij} x_j &\leq b_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ x_j &\geq 0 \forall j \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Min } W &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.a} \\ \sum a_{ij} y_i &\geq c_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ y_i &\geq 0 \forall i \end{aligned}$

Os dois modelos numéricos seguintes exemplificam os dois tipos (da Silva, 2006).

PRIMAL	DUAL
$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} \\ 9x_1 + x_2 &\leq 18 \quad Y_1 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 12 \quad Y_2 \\ x_1 &\geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Min } W &= 18y_1 + 12y_2 \\ \text{Sujeito a} \\ 9y_1 + 3y_2 &\geq 4 \quad X_1 \\ y_1 + y_2 &\geq 1 \quad X_2 \\ y_1 &\geq 0 \quad y_2 \geq 0 \end{aligned}$

A próxima tabela destaca a montagem pela forma matricial. (Andrade, 2000).

PRIMAL	DUAL
$\text{Max } Z = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ <p>Sujeito a</p> $\begin{matrix} y_1 \rightarrow \\ y_2 \rightarrow \\ y_3 \rightarrow \\ y_4 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$ $x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$	$\text{Min } W = (18 \ 15 \ 20 \ 8) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ <p>Sujeito a</p> $\begin{matrix} x_1 \rightarrow \\ x_2 \rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $y_1 \geq 0 \quad y_2 \geq 0$

Resumidamente, para construção de qualquer DUAL, deve-se basear no seguinte resumo de regras:

PRIMAL (MAX) \Longrightarrow	DUAL (MIN)
Restrição n é \leq	$Y_n \geq 0$
Restrição n é $=$	Y_n é livre
Restrição n é \geq	$Y_n \leq 0$
$X_m \geq 0$	Restrição m é \geq
X_m é livre	Restrição m é $=$
$X_m \leq 0$	Restrição m é \leq
DUAL (MAX) \Longleftarrow	PRIMAL (MIN)

2 - Teorema Dual (baseado em dos Santos, 2000)

Avaliando-se os modelos genéricos anteriores, supondo-se que x_j sejam valores praticáveis (soluções viáveis) para o modelo tipo Primal, e y_i os valores praticáveis (soluções viáveis) para o modelo tipo Dual; multiplicando-se as restrições do Primal por y_i e somando-as; multiplicando-se as restrições do Dual por x_j e somando-as; obtém-se $W \geq Z$.

Exemplo:

Para o Primal:

$$9 x_1 + x_2 \leq 18 \quad \cdot \quad 9 x_1 y_1 + x_2 y_1 \leq 18 y_1$$

$$3 x_1 + x_2 \leq 12 \quad \cdot \quad 3 x_1 y_2 + x_2 y_2 \leq 12 y_2$$

$$3 x_1 y_2 + x_2 y_2 + 9 x_1 y_1 + x_2 y_1 \leq 18 y_1 + 12 y_2$$

Para o Dual:

$$9 y_1 + 3 y_2 \geq 4 \dots 9 y_1 x_1 + 3 y_2 x_1 \geq 4 x_1$$

$$y_1 + y_2 \geq 1 \dots y_1 x_2 + y_2 x_2 \geq 1 x_2$$

$$9 y_1 x_1 + 3 y_2 x_1 + y_1 x_2 + y_2 x_2 \geq 4 x_1 + x_2$$

Observa-se que os lados direitos são iguais nas duas inequações, desta forma:

$$18 y_1 + 12 y_2 \geq 4 x_1 + x_2 \dots W \geq Z$$

Isso caracteriza que o valor da função objetivo de uma solução praticável (viável) de um dos modelos é um limite para qualquer outra solução praticável (viável) do outro modelo.

Qualquer solução praticável, incluindo a ótima, para o Primal, será menor ou igual a W; e qualquer solução praticável, inclusive a ótima, para o Dual será maior ou igual a Z. Concluindo-se que a solução ótima será aquela em que $Z = W$, como por exemplo, $\text{Max } Z = \text{Min } W$.

Sendo assim, o Teorema Dual é:

Quando os modelos Dual e Primal possuem soluções praticáveis, tem-se que $Z \text{ ótimo} = W \text{ ótimo}$.

Por consequência:

Se um dos modelos tem solução ótima ilimitada ($Z \text{ ótimo}$ ou $W \text{ ótimo} = \pm\infty$), então o outro modelo não tem solução praticável.

Observações:

- A) O problema Dual do Dual é o Primal;
- B) É indiferente a qual dos dois modelos se chama Primal. Normalmente, chama-se Primal àquele que corresponde ao modelo matemático mais próximo do problema de decisão.

As relações entre o Primal e o Dual são:

Tomando-se os modelos de programação linear PRIMAL e o seu DUAL, e resolvendo-os pelo SIMPLEX, deve-se observar os resultados na linha da variável a otimizar, destacando-se os valores das variáveis de decisão e de folga. Veja o exemplo adiante.

PRIMAL	DUAL
<p>$\text{MAX } Z = 3x_1 + 2x_2$ sujeito a $2x_1 + x_2 \leq 100$ $x_1 + x_2 \leq 80$ $x_1 \leq 40$ $x_i \geq 0$ para $i = 1$ e 2.</p>	<p>$\text{MIN } K = 100y_1 + 80y_2 + 40y_3$ sujeito a $2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3$ $y_1 + y_2 \geq 2$ $y_i \geq 0$ para $i = 1, 2$ e 3.</p>

Solução do SIMPLEX do PRIMAL:

Base	X ₁	X ₂	f ₁	f ₂	f ₃	b
X ₂	0	1	-1	2	0	60
f ₃	0	0	-1	1	1	20
X ₁	1	0	1	1	0	20
Z	0	0	1	1	0	180

Solução do SIMPLEX do DUAL:

Base	y ₁	y ₂	y ₃	f ₁	f ₂	b
y ₁	1	0	1	-1	1	1
y ₂	0	1	-1	1	-2	1
K	0	0	20	20	60	180

Então, a correspondência entre os resultados do SIMPLEX é:

PRIMAL vd X ₁	0	DUAL (Solução) vf f ₁	0
PRIMAL vd X ₂	0	DUAL (Solução) vf f ₂	0
PRIMAL vf f ₁	1	DUAL (Solução) vd y ₁	1
PRIMAL vf f ₂	1	DUAL (Solução) vd y ₂	1
PRIMAL vf f ₃	0	DUAL (Solução) vd y ₃	0
DUAL vd y ₁	0	PRIMAL (Solução) vf f ₁	0
DUAL vd y ₂	0	PRIMAL (Solução) vf f ₂	0
DUAL vd y ₃	20	PRIMAL (Solução) vf f ₃	20
DUAL vf f ₁	20	PRIMAL (Solução) vd x ₁	20
DUAL vf f ₂	60	PRIMAL (Solução) vd x ₂	60
Solução Z	180	Solução K	180

Legenda: vd – variável de decisão vf – variável de folga

De acordo com Andrade (2000), o problema Dual, para modelos em que as restrições são desigualdades do tipo \leq , é construído a partir do Primal da seguinte forma:

1. Cada restrição, em um problema, corresponde a uma variável no outro;
2. Os elementos do lado direito das restrições, em um problema, são os coeficientes da função-objetivo do outro problema;
3. Se o objetivo de um problema é maximizar, o do outro será minimizar, e vice-versa;
4. O problema de maximização tem restrições com sentido \leq , e o problema de minimização tem restrições com sentido oposto (\geq);
5. As variáveis de ambos os problemas são não-negativas.

Exemplo 1:

Construir o modelo Dual a partir do Primal a seguir:

Engenharias

PESQUISA OPERACIONAL I

$$\text{MAX } Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \text{ (Lucro total)}$$

sujeito a

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 100 \text{ (Matéria prima - quilograma)}$$

$$6x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 360 \text{ (Espaço - m}^2\text{)}$$

$$8x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 400 \text{ (Mão de obra - Hh)}$$

$$x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2 \text{ e } 3.$$

$$\text{Valores Ótimos: } Z = 280, x_1 = 20, x_2 = 40, x_3 = 0$$

Modelo Dual:

$$\text{MIN } W = 100y_1 + 360y_2 + 400y_3$$

sujeito a

$$y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 4$$

$$2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 5$$

$$2y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geq 3$$

$$y_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2 \text{ e } 3.$$

$$\text{Valores Ótimos: } W = 280, y_1 = 1, y_2 = 1/2, y_3 = 0$$

Caso Especial:

Quando restrições são expressas por igualdades, a variável Dual correspondente não terá restrição de sinal. A equação que representa a restrição poderá ser substituída por duas inequações, conforme o exemplo a seguir.

Exemplo 2:

Construir o modelo Dual a partir do Primal a seguir:

$$\text{MIN } Z = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4$$

sujeito a

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10$$

$$x_3 + 2x_4 \leq 10$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 \leq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 5$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_4 : Irrestrita em sinal

Para utilizar-se o modelo anterior, deve-se adequá-lo às regras da tabela das relações entre Primal e Dual. Inicialmente, observa-se que para um modelo de minimização deve-se transformar as restrições para \geq ou $=$, ficando com:

$$\text{MIN } Z = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4$$

sujeito a

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 & >> & y_1 \\ & - x_3 - 2x_4 \geq -10 & >> y_2 \\ x_1 - x_2 & + x_4 \geq -5 & >> y_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 5 & >> & y_4 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 \geq -20 & >> & y_5 \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$
 x_4 : Irrestrita em sinal

Sendo assim:

$$\text{MIN } Z = 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4$$

sujeito a

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 10 & >> & y'_1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 10 & >> & y''_1 \\ & >> & -2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 \geq -10 >> y''_1 \\ -x_3 - 2x_4 \geq -10 & >> & y_2 \\ x_1 - x_2 + x_4 \geq -5 & >> & y_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \geq 5 & >> & y_4 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 \geq -20 & >> & y_5 \end{array}$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$
 x_4 : Irrestrita em sinal

Considera-se assim que $y_1 = (y'_1 - y''_1)$ e sendo y_1 irrestrita em sinal, e observando-se a formação do modelo anterior em destaque, chega-se ao seguinte modelo Dual:

$$\text{MAX } W = 10y_1 - 10y_2 - 5y_3 + 5y_4 - 20y_5$$

sujeito a

$$2y_1 + y_3 + 2y_4 - 2y_5 \leq 3 \quad \gg x_1$$

$$y_1 - y_3 + 3y_4 - 3y_5 \leq -4 \quad \gg x_2$$

$$2y_1 - y_2 + y_4 - y_5 \leq 1 \quad \gg x_3$$

$$y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 - y_5 = -2 \quad \gg x_4$$

$$y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

y_1 : Irrestrita em sinal

3 - Interpretação Econômica das Variáveis Duais

(baseado em Andrade, 2000)

Qual o significado do valor ótimo de uma variável do modelo dual? É o limite que devo pagar por uma unidade adicional do recurso associado à variável.

Observando-se o exemplo 1 deste tópico, verifica-se que:

- 1kg a mais de matéria prima (primeira restrição) acrescenta \$1,00 (y_1 – variável Dual associada à primeira restrição) a mais em Z;
- 1m² a mais de área (segunda restrição) para estocagem acrescenta \$0,50 (y_2 - variável Dual associada à segunda restrição) a mais em Z;
- Em relação à mão de obra (terceira restrição) o valor de y_3 associado é zero, ou seja, como existe folga nesta restrição não se está utilizando toda a mão de obra disponível e, devido a isso, não se tem nenhum ganho em adquirir mais mão de obra, mesmo sem custo, pois apenas sobraria mais recurso.

Obs: Por terem este significado, os valores ótimos das variáveis do modelo dual são chamados de valores implícitos ou preços sombra (*shadow prices*).

Observando-se a finalização do Exemplo 1, da página 32, pelo resultado da tela do software Lindo, nota-se que a coluna *Dual Prices* representa os valores de y_1 e y_2 obtidos com a solução do Dual.

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	0	2	1	-1	4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
Z	0	1	0	2	16

A próxima figura mostra a implementação (direita) e o resultado (esquerda) exposta pelo programa Lindo (<http://www.lindo.com>)

Engenharias

PESQUISA OPERACIONAL I

The screenshot shows the LINDO software interface. The 'Reports Window' on the left displays the results of a linear programming problem. The 'Implementation' window on the right shows the original problem formulation.

Reports Window:

```
! Primeiro exemplo do simplex da apostila
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)      16.000000
      VARIABLE            VALUE            REDUCED COST
      X1                   4.000000          0.000000
      X2                   0.000000          1.000000
      ROW  SLACK OR SURPLUS  DUAL PRICES
    2)           4.000000          0.000000
    3)           0.000000          2.000000
    4)           4.000000          0.000000
    5)           0.000000          0.000000
      NO. ITERATIONS=          1
```

Implementation Window:

```
MAX      4 x1 + x2
SUBJECT TO
  2 x1 + 3 x2 <= 12
  2 x1 + x2 <= 8
x1 >= 0
x2 >= 0
END
```

RESULTADO

IMPLEMENTAÇÃO

UNIDADE 5 - ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A otimização é feita baseando-se nos coeficientes da função objetivo (c_n), nas constantes (b_m) e nos coeficientes das restrições (a_{mn}). Esses valores são obtidos por intermédio da análise humana e, por isso, são passíveis de erros, provocando incertezas ou desvios da realidade. Sendo assim necessita-se avaliar o grau de dependência desses em relação à solução otimizada. Esse procedimento é denominado Análise de Sensibilidade.

Avalia-se a estabilidade da solução otimizada baseando-se nos parâmetros $a_{m,n}$, b_m e c_n conforme a forma matricial exposta a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

1 - Análise de Sensibilidade dos Coeficientes da Função Objetivo (quantidade de produtos)

Por intermédio da Análise de Sensibilidade pode-se determinar qual o intervalo de variação dos coeficientes da função objetivo, sem que a solução otimizada seja alterada.

Exemplo – Adaptado de Nogueira (2007)

Função objetivo:

$$\text{MAX } Z = X_1 + 1,5 X_2$$

Sujeito a:

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 160$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 120$$

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 280$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

A tabela Simplex inicial é:

	X_1	X_2	F_1	F_2	F_3	b
F_1	2	2	1	0	0	160
F_2	1	2	0	1	0	120
F_3	4	2	0	0	1	280
Z	-1	-1,5	0	0	0	0

A tabela Simplex final é:

	X_1	X_2	F_1	F_2	F_3	b
X_1	1	0	1	-1	0	40
X_2	0	1	-1/2	1	0	40
F_3	0	0	-3	2	1	40
Z	0	0	1/4	1/2	0	100

A solução otimizada é $X_1= 40$, $X_2= 40$, $f_1= 0$, $f_2= 0$, $f_3= 40$ e $Z = 100$

A) Qual o intervalo ótimo para c_2 (coeficiente de X_2)?

Inicialmente $c_2 = 1,5$, fazendo-se $c_2' = 1,5 + p_2$, a nova função objetivo fica:

$$\text{MAX } Z = X_1 + (1,5 + p_2) X_2$$

Tomando-se a tabela final do Simplex, observam-se a segunda e última linhas.

	X_1	X_2	F_1	F_2	F_3	b
X_1	1	0	1	-1	0	40
X_2	0	1	-1/2	1	0	40
F_3	0	0	-3	2	1	40
Z	0	0	1/4	1/2	0	100

Os valores obtidos são: $1/4 - 1/2 p_2 \geq 0$ e $1/2 + 1 p_2 \geq 0$.

$$1/4 - 1/2 p_2 \geq 0 \dots -1/2 p_2 \geq -1/4 \dots p_2 \leq 1/4 \times 2 \dots p_2 \leq 1/2$$

$$1/2 + 1 p_2 \geq 0 \dots p_2 \geq -1/2$$

$$-1/2 \leq p_2 \leq 1/2$$

O coeficiente de X_2 pode então variar de $c_2' = 1,5 + 1/2 = 2$ a $c_2' = 1,5 - 1/2 = 1$, ou seja, o intervalo ótimo é $1 \leq c_2' \leq 2$.

B) Qual o intervalo ótimo para c_1 (coeficiente de X_1)?

Inicialmente $c_1 = 1$ fazendo-se $c_1' = 1 + p_1$, a nova função objetivo fica:

$$\text{MAX } Z = (1 + p_1) X_1 + 1,5 X_2$$

Tomando a tabela final do Simplex, observam-se a primeira e últimas linhas.

	X_1	X_2	F_1	F_2	F_3	b
X_1	1	0	1	-1	0	40
X_2	0	1	-1/2	1	0	40
F_3	0	0	-3	2	1	40
Z	0	0	1/4	1/2	0	100

Os valores obtidos são: $1/4 + 1 p_1 \geq 0$ e $1/2 - 1 p_1 \geq 0$.

$$1/4 + 1 p_1 \geq 0 \dots p_1 \geq -1/4$$

$$1/2 - 1 p_1 \geq 0 \dots -p_1 \geq -1/2 \dots p_1 \leq 1/2$$

$$-1/4 \leq p_1 \leq 1/2$$

O coeficiente de X_1 pode então variar de $c_1' = 1 + 1/2 = 3/2$ a $c_1' = 1 - 1/4 = 3/4$, ou seja, o intervalo ótimo é $3/4 \leq c_1' \leq 3/2$ ou $0,75 \leq c_1' \leq 1,5$.

2 - Análise de Sensibilidade dos Termos Independentes (quantidade de recursos)

Por intermédio da Análise de Sensibilidade pode-se determinar qual o intervalo de variação dos Termos Independentes das Restrições, sem que a solução otimizada seja alterada.

A) Qual o intervalo ótimo para b_2 (lado direito da segunda inequação)?

Relembrando:

Função objetivo:

$$\text{MAX } Z = X_1 + 1,5 X_2$$

Sujeito a:

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 160$$

$$\mathbf{X_1 + 2 X_2 \leq 120}$$

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 280$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	F_1	F_2	F_3	b
X_1	1	0	1	-1	0	40
X_2	0	1	-1/2	1	0	40
F_3	0	0	-3	2	1	40
Z	0	0	1/4	1/2	0	100

Tomando-se $X_1 + 2 X_2 \leq 120 + p_2$

Podem-se analisar as seguintes inequações geradas a partir da tabela final Simplex:

$40 - 1 p_2 \geq 0$, $40 + 1 p_2 \geq 0$ e $40 + 2 p_2 \geq 0$. Resolvendo-as chega-se a:

$$40 - 1 p_2 \geq 0 \dots - p_2 \geq - 40 \dots p_2 \leq 40$$

$$40 + 1 p_2 \geq 0 \dots p_2 \geq - 40$$

$$40 + 2 p_2 \geq 0 \dots 2 p_2 \geq - 40 \dots p_2 \geq - 20$$

Portanto, o intervalo ótimo é $- 20 \leq p_2 \leq 40$



B) Qual o intervalo ótimo para b_1 (lado direito da primeira inequação)?

Relembrando:

Função objetivo:

Engenharias
PESQUISA OPERACIONAL I

$$\text{MAX } Z = X_1 + 1,5 X_2$$

Sujeito a:

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 160$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 120$$

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 280$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	F_1	F_2	F_3	b
X_1	1	0	1	-1	0	40
X_2	0	1	-1/2	1	0	40
F_3	0	0	-3	2	1	40
Z	0	0	1/4	1/2	0	100

Tomando-se $2 X_1 + 2 X_2 \leq 160 + p_1$

Podem-se analisar as seguintes inequações geradas a partir da tabela final Simplex:

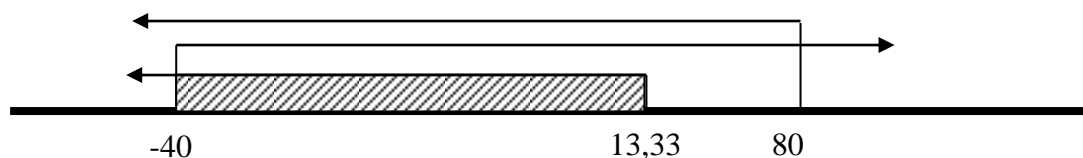
$40 + 1 p_1 \geq 0$, $40 - 1/2 p_1 \geq 0$ e $40 - 3 p_1 \geq 0$. Resolvendo-as chega-se a:

$$40 + 1 p_1 \geq 0 \dots p_1 \geq -40$$

$$40 - 1/2 p_1 \geq 0 \dots -1/2 p_1 \geq -40 \dots 1/2 p_1 \leq 40 \dots p_1 \leq 80$$

$$40 - 3 p_1 \geq 0 \dots -3 p_1 \geq -40 \dots p_1 \leq 13,33$$

Portanto, o intervalo ótimo é $-40 \leq p_1 \leq 13,33$



C) Qual o intervalo ótimo para b_3 (lado direito da terceira inequação)?

Relembrando:

Função objetivo:

$$\text{MAX } Z = X_1 + 1,5 X_2$$

Sujeito a:

$$2 X_1 + 2 X_2 \leq 160$$

$$X_1 + 2 X_2 \leq 120$$

$$4 X_1 + 2 X_2 \leq 280$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	F_1	F_2	F_3	b
X_1	1	0	1	-1	0	40
X_2	0	1	-1/2	1	0	40
F_3	0	0	-3	2	1	40
Z	0	0	1/4	1/2	0	100

Tomando-se $4 X_1 + 2 X_2 \leq 280 + p_3$

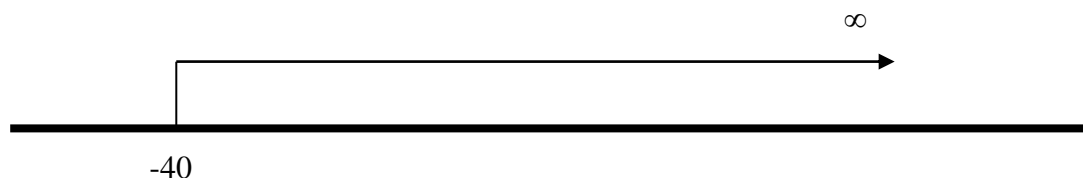
Pode-se analisar a seguinte inequação gerada a partir da tabela final Simplex:

$40 + 1 p_3 \geq 0$. Resolvendo-a chega-se a:

$40 + 1 p_3 \geq 0 \dots p_3 \geq -40$

Obs.: as outras inequações apresentam zero multiplicado pela variável p_3 e devido a isso, variação ao infinito (∞).

Portanto, o intervalo ótimo é $-40 \leq p_3 \leq \infty$.



3 - Análise de Sensibilidade nos Coeficientes das Restrições (coeficientes dos recursos) e com as inserções de novas variáveis e/ou restrições

Segundo Andrade (2000), para essas situações, considerando-se que esses valores podem afetar diretamente a solução, isto é, fazer com que ela deixe de ser ótima, ou até mesmo viável, efetua-se a análise do modelo de programação linear com os novos valores das variáveis.

4 - Interpretação Econômica dos Coeficientes do Simplex

1) Tomando-se o quadro Simplex do exemplo 1, observa-se que a solução ótima é:

- a. Variáveis Básicas (na Base): $x_1 = 4$; $f_1 = 4$; e $Z = 16$.
- b. Variáveis não-Básicas (Fora da Base): $x_2 = 0$; $f_2 = 0$.

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	0	2	1	-1	4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
Z	0	1	0	2	16

Observando-se o item b, ou seja, as variáveis fora da base, pode-se fazer a seguinte análise de sensibilidade:

Para x_2 :

Como $x_2 = 0$, considera-se que uma unidade será disponibilizada, isto é, $x_2 = 1$, e devido a isso, quer-se avaliar quais as variações que as variáveis básicas terão.

O quadro final do Simplex dá essa resposta.

Engenharias
PESQUISA OPERACIONAL I

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	0	2	1	-1	4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
Z	0	1	0	2	16

a) Para o aumento de uma unidade de x_2 existem as seguintes variações para f_1 , x_1 e Z:

$$\Delta f_1 = -2; \Delta x_1 = -1/2; \text{ e } \Delta Z = -1$$

Para f_2 :

Como $f_2 = 0$, considera-se que uma unidade será disponibilizada, isto é, $f_2 = 1$, e devido a isso, quer-se avaliar quais as variações que as variáveis básicas terão.

O quadro final do Simplex dá essa resposta.

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	0	2	1	-1	4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
Z	0	1	0	2	16

a) Para o aumento de uma unidade de f_2 existem as seguintes variações para f_1 , x_1 e Z:

$$\Delta f_1 = +1; \Delta x_1 = -1/2; \text{ e } \Delta Z = -2$$

A solução ótima indica que:

Para se obter um valor ótimo (máximo) 16, necessita-se produzir 4 unidades do produto x_1 , observando-se que haverá sobra de 4 unidades do recurso expresso pela restrição 1, ou seja, $f_1 = 4$.

Esse valor máximo é obtido sem a necessidade de produzir o produto x_2 ($x_2 = 0$) e utilizando-se todo o recurso expresso pela restrição 2, ou seja, não haverá sobra ($f_2 = 0$).

Cabe então analisar qual a influência das variáveis fora da base (x_2 e f_2), pois elas resultam em valores zero para obter-se o máximo de produtividade ($Z=16$). Os valores estão disponíveis no quadro Simplex, com o sinal trocado, ou seja, para x_2 , -2, -1/2 e -1 e para f_2 , +1, -1/2 e -2.

Impondo-se 1 unidade a mais no produto x_2 (isto é, redução na disponibilidade), reduz-se a produção do produto x_1 em -0,5, restando 3,5 unidades, reduz-se a folga do recurso (diminui-se a disponibilidade) f_1 em 2 unidades, sobrando 2 unidades e diminui-se o valor ótimo em 1 unidade, sobrando 15 unidades.

Impondo-se 1 unidade a mais no recurso f_2 (isto é, redução na disponibilidade), reduz-se a produção do produto x_1 em -0,5, restando 3,5 unidades, aumenta-se a folga do recurso (aumenta-se a disponibilidade) f_1 em 1 unidade, resultando em 5 unidades e diminui-se o valor ótimo em 2 unidades, sobrando 14 unidades.

O recurso 1 não apresenta qualquer variação, pois continua com folga na sua disponibilidade.

A última linha do quadro Simplex, onde os valores devem ter o sinal trocado, representa o preço sombra, pois denota qual será a influência das variáveis fora da base na função objetivo, ou seja,

para x_2 , -1 e para f_2 , -2. O preço sombra será detalhado, mais adiante, no tópico que trata do modelo Dual.

Outra análise de sensibilidade também pode ser feita: decrementa-se 1 unidade nas variáveis fora da base, isto é, cresce 1 unidade na disponibilidade. O quadro final do Simplex apresenta esses resultados, como na situação anterior, só que sem a alteração de sinal. Devido a isso, o resultado da análise é contrário ao anterior.

UNIDADE 6 - PROBLEMA CLÁSSICO DE TRANSPORTE

1 - Modelagem

O Problema de Transporte constitui uma das principais aplicações da PL para auxiliar o planejamento e a operação de transportes. O Problema pode ser formulado inicialmente da seguinte forma:

Considerando-se o transporte de produtos de m origens, onde estão estocados, para n destinos, onde são necessários. Conhecendo-se os custos unitários de transporte de cada origem para cada destino (C_{ij} – custo unitário de transporte da origem i para o destino j), deve-se decidir quanto transportar de cada origem para cada destino (X_{ij} – quantidade a ser transportada da origem i para o destino j), de modo gastar o menos possível, ou seja, minimizar o custo total de transporte. Cada uma das origens é dotada de a_i unidades disponíveis e, cada um dos destinos requer b_j unidades, todos inteiros e positivos. Considerar-se-á inicialmente que a oferta total é igual a demanda total, isto é:

$$\sum_1^m a_i = \sum_1^n b_j$$

O modelo matemático para este problema pode ser expresso da seguinte forma:

Minimizar: $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

Com: todos os X_{ij} não negativos e inteiros

Este modelo matemático pode ser representado em forma de tabular conforme exposto na tabela 1.1.

Tabela 1.1 - Representação do Problema de Transporte

		DESTINOS					Oferta
		1	2	3	...	n	
O R I G E N S	1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
	2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2

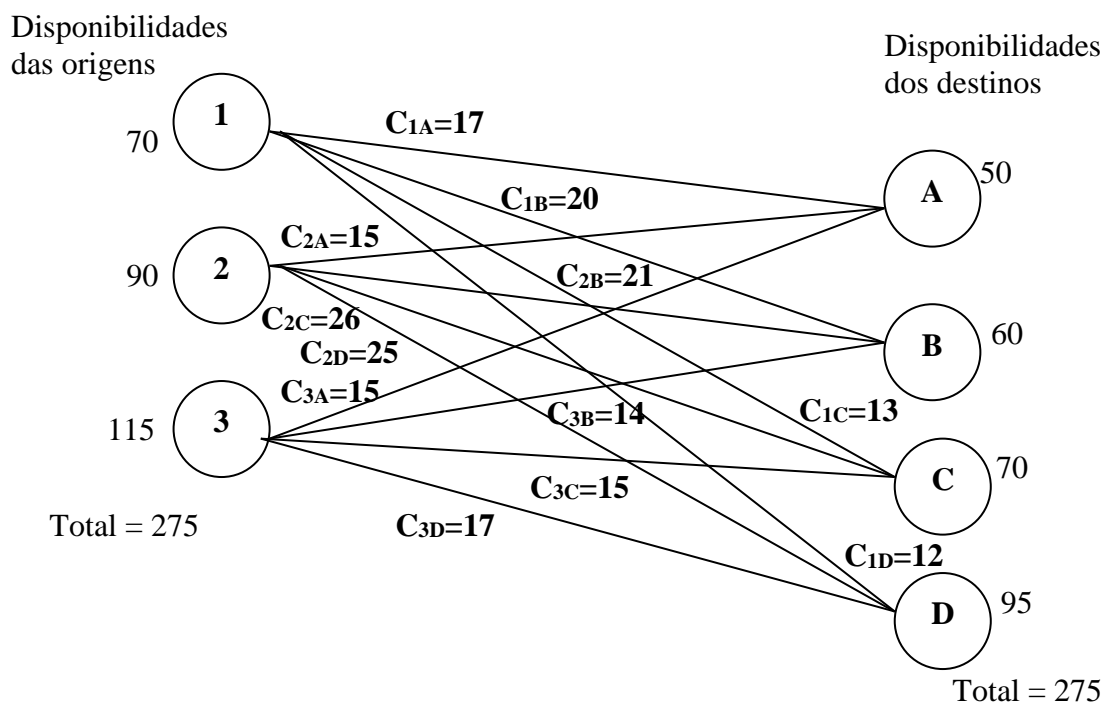
	m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
Demanda		b_1	b_2	b_3	...	b_n	

Exemplo: Uma empresa tem fábricas em três locais diferentes, que abastecem quatro armazéns distantes uns dos outros. As capacidades das fábricas em certo período de tempo são 70, 90 e 115 e as necessidades dos armazéns, no mesmo período de tempo, são 50, 60, 70 e 95. Os custos unitários para cada encaminhamento fábrica-armazém estão expostos na tabela a seguir.

Tabela 1.2 - Tabela dos custos unitários de transporte das origens para os destinos

		Destinos			
		A	B	C	D
Origens	1	17	20	13	12
	2	15	21	26	25
	3	15	14	15	17

Figura 1.1 - Representação gráfica do problema



Tomando-se como um problema de programação linear, a estrutura do problema anterior ficaria da seguinte forma:

$$\text{Minimizar custo} = 17X_{1A} + 20X_{1B} + 13X_{1C} + 12X_{1D} + 15X_{2A} + 21X_{2B} + 26X_{2C} + 25X_{2D} + 15X_{3A} + 14X_{3B} + 15X_{3C} + 17X_{3D}$$

Sujeito a

(Ofertas - Origem)

$$X_{1A} + X_{1B} + X_{1C} + X_{1D} = 70$$

$$X_{2A} + X_{2B} + X_{2C} + X_{2D} = 90$$

$$X_{3A} + X_{3B} + X_{3C} + X_{3D} = 115$$

(Demandas - Destinos)

$$X_{1A} + X_{2A} + X_{3A} = 50$$

$$X_{1B} + X_{2B} + X_{3B} = 60$$

$$X_{1C} + X_{2C} + X_{3C} = 70$$

$$X_{1D} + X_{2D} + X_{3D} = 95$$

$$X_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,3; j = A,B,C,D)$$

A solução dos Problemas de Transporte, sem usar os conceitos de PL, passa por quatro etapas:

1. Determinação de uma solução inicial básica;
2. Teste de solução quanto à condição de ótimo;
3. Melhoria da solução quando não é ótima;
4. Repetição das etapas 2 e 3 até se obter a solução ótima.

2 - Métodos para determinação da Solução Inicial

2.1 - Método do Canto Noroeste

Começando-se pela célula superior esquerda (canto noroeste), aloca-se a X_{11} tantas unidades quantas sejam possíveis, sem violar as restrições. Isto corresponderá ao menor dos dois valores a_1 e b_1 . Após, continua-se o algoritmo deslocando-se para a célula imediatamente à direita se ainda restar alguma oferta ou, caso contrário, para a célula imediatamente abaixo. A cada etapa aloca-se à célula em consideração, tantas unidades quantas sejam possíveis sem violar as restrições: a soma das alocações da linha i não pode exceder o valor de a_i , a soma da coluna j não pode exceder o valor de b_j e nenhuma alocação pode ser negativa.

Exemplo 2: Utilizando-se os dados do exemplo1, determinar uma solução inicial utilizando o método do Canto Noroeste.

	A	B	C	D	Oferta
1	17	20	13	12	70
	50	20			
2	15	21	26	25	90
		40	50		
3	15	14	15	17	115
			20	95	
Demanda	50	60	70	95	

2.2 - Método de Vogel ou Método das Penalidades

O método funciona da seguinte forma:

1. Calcula-se a penalidade para cada uma das linhas e colunas. Escolhe-se a linha ou coluna que apresenta a maior penalidade. Caso haja mais de uma, escolhe-se qualquer uma delas;
2. Aloca-se o máximo possível de quantidade para a célula de menor custo da linha ou coluna escolhida no passo anterior. Isso tornará a disponibilidade da linha ou coluna a qual tal célula pertence, igual a zero. Eliminar esta linha ou coluna do restante do processo e
3. Repetir os passos 1 e 2 até que todos os transportes tenham sido realizados

Considera-se "penalidade de uma linha ou coluna" a diferença positiva entre os dois custos de menor valor na linha ou coluna.

Exemplo 3: Utilizando-se os dados do exemplo1, determinar uma solução inicial utilizando o método de Vogel.

Conforme descreve o primeiro passo, deve-se calcular as penalidades e identificar as maiores.

Engenharias
PESQUISA OPERACIONAL I

	A	B	C	D	Oferta	Penalidade
1	17	20	13	12	70	1 (13-12)
2	15	21	26	25	90	6 (21-15)
3	15	14	15	17	115	1 (15-14)
Demanda	50	60	70	95		
Penalidade	0 (15-15)	6 (20-14)	2 (15-13)	5 (17-12)		

As maiores penalidades estão na linha 2 e na coluna B, pois essas obtiveram penalidades iguais a seis. Deve-se então escolher entre a linha ou a coluna, pois as pontuações são iguais. Optou-se pela linha 2. Nesta linha, a célula de menor custo é a que corresponde à coluna A (quinze). Aloca-se, portanto, 50 para tal célula e elimina-se a coluna A dos passos seguintes. Devem-se então recalculer as penalidades.

	A	B	C	D	Oferta	Penalidade
1	17	20	13	12	70	1 (13-12)
2	15	21	26	25	90	4 (25-21)
3	15	14	15	17	115	1 (15-14)
Demanda	50	60	70	95		
Penalidade	0 (15-15)	6 (20-14)	2 (15-13)	5 (17-12)		

A coluna B apresenta a maior penalidade (seis). Nesta coluna, a célula de menor custo é a que corresponde à linha 3 (custo igual a 14). Aloca-se, portanto, 60 para tal célula e elimina-se a coluna B dos passos seguintes.

	A	B	C	D	Oferta	Penalidade
1	17	20	13	12	70	1 (13-12)
2	15	21	26	25	90	1 (26-25)
3	15	14	15	17	115	2 (17-15)
Demanda	50	60	70	95		
Penalidade	0 (15-15)	6 (20-14)	2 (15-13)	5 (17-12)		

As tabelas a seguir representam os passos seguintes até que todos os transportes estejam finalizados.

Engenharias
PESQUISA OPERACIONAL I

	A		B		C	D	Oferta	Penalidade
1	17		20		13	12	70	1 (13-12)
						70		
2	15		21		26	25	90	1 (26-25)
		50						
3	15		14		15	17	115	2 (17-15)
			60					
Demanda	50		60		70	95		
Penalidade	0 (15-15)		6 (20-14)		11 (26-15)	8 (25-17)		

	A		B		C	D	Oferta	Penalidade
1	17		20		13	12	70	1 (13-12)
						70		
2	15		21		26	25	90	1 (26-25)
		50						
3	15		14		15	17	115	2 (17-15)
			60		55			
Demanda	50		60		70	95		
Penalidade	0 (15-15)		6 (20-14)		26 (26)	25 (25)		

	A		B		C	D	Oferta	Penalidade
1	17		20		13	12	70	1 (13-12)
						70		
2	15		21		26	25	90	1 (26-25)
		50			15			
3	15		14		15	17	115	2 (17-15)
			60		55			
Demanda	50		60		70	95		
Penalidade	0 (15-15)		6 (20-14)		26 (26)	25 (25)		

	A	B	C	D	Oferta	Penalidade
1	17	20	13	12	70	1 (13-12)
				70		
2	15	21	26	25	90	1 (26-25)
	50		15	25		
3	15	14	15	17	115	2 (17-15)
		60	55			
Demanda	50	60	70	95		
Penalidade	0 (15-15)	6 (20-14)	26 (26)	25 (25)		

A solução final está expressa na tabela a seguir:

Tabela 2.3 - Solução Inicial

	A	B	C	D	Oferta
1	17	20	13	12	70
				70	
2	15	21	26	25	90
	50		15	25	
3	15	14	15	17	115
		60	55		
Demanda	50	60	70	95	

3. Evolução para a Solução Ótima a partir do DUAL

Como se observou anteriormente, uma Solução Inicial é possível ser obtida, mas não se garante que ela seja a Solução Ótima, necessitando-se verificar quanto à condição de ótimo.

Baseado na solução DUAL, Dantzig desenvolveu um método para este teste. Os resultados da dualidade servem para calcular os custos reduzidos do problema primal, que são analisados para determinar se a solução é ótima ou não.

Necessita-se então verificar se a Solução Inicial pode ser melhorada. Por intermédio da tabela 2.3 que representa a solução inicial, devem-se identificar as variáveis básicas e não-básicas. As primeiras são identificadas pelas células que têm valores alocados e as segundas, o inverso.

Observa-se na tabela 2.3 que as variáveis básicas são: 1D, 2A, 2C, 2D, 3B e 3C. As variáveis não-básicas são: 1A, 1B, 1C, 2B, 3A e 3D. A seguir serão descritos os passos para avaliação da existência de uma solução melhorada.

1º passo: devem-se calcular as variáveis DUAIS que são os pesos para todas as linhas e as colunas, considerando que a soma entre os pesos de cada linha e de cada coluna é igual ao custo alocado na respectiva célula (linha x coluna). Inicialmente atribui-se zero à uma linha ou coluna (geralmente a primeira linha) que contenha uma variável básica. O exemplo a seguir demonstra a alocação deste peso na linha 1 coluna D (célula com custo 12).

Engenharias
PESQUISA OPERACIONAL I

	A	B	C	D	Oferta	Pesos
1	17	20	13	12	70	0
				70		
2	15	21	26	25	90	
	50		15	25		
3	15	14	15	17	115	
		60	55			
Demanda	50	60	70	95		
Pesos				12		

Os próximos pesos terão a mesma sequência de cálculo, conforme expresso na próxima tabela.

	A	B	C	D	Oferta	Pesos
1	17	20	13	12	70	0
				70		
2	15	21	26	25	90	13
	50		15	25		
3	15	14	15	17	115	
		60	55			
Demanda	50	60	70	95		
Pesos				12		

Seguindo esta forma de cálculo chega-se a seguinte tabela de pesos:

	A	B	C	D	Oferta	Pesos
1	17	20	13	12	70	0
				70		
2	15	21	26	25	90	13
	50		15	25		
3	15	14	15	17	115	2
		60	55			
Demanda	50	60	70	95		
Pesos	2	12	13	12		

2º passo: utilizando-se os valores dos pesos, calcula-se para cada variável não básica a quantidade expressa pela seguinte fórmula:

$$\text{Custo (linha x coluna) - peso da linha - peso da coluna}$$

Calculando-se para a primeira variável não básica (1A), temos o seguinte resultado:

$$\text{Custo}_{1A} - \text{Peso}_1 - \text{Peso}_A = 17 - 0 - 2 = 15$$

Para as demais linhas x colunas os resultados são:

	A	B	C	D
1	17-0-2=15	20-0-12=8	13-0-13=0	
2		21-13-12=-4		
3	15-2-2=11			17-2-12=3

Engenharias

PESQUISA OPERACIONAL I

Se todas as quantidades calculadas forem não negativas, a solução presente é a ótima. Caso alguns dos valores forem negativos, deve-se utilizar como referência para o próximo passo o valor mais negativo. A célula que abriga este valor deverá ser transformada em uma variável básica no lugar de uma das variáveis básicas da última solução.

Neste caso a célula 2B obteve -4 como resultado, demonstrando a necessidade da continuidade do processo para identificação da solução ótima.

3º passo: para saber quais das variáveis básicas devem ser substituídas pela variável não básica 2B, deve-se montar um circuito de compensação entre as variáveis básicas, a partir da variável que deverá entrar e seguindo alternadamente na direção da linha e na direção da coluna, subtraindo-se e somando-se o valor de entrada (em princípio um valor X), até o retorno à variável de entrada. Com este procedimento as restrições de linha e coluna ficam satisfeitas.

	A	B	C	D	Oferta	Pesos
1	17	20	13	12	70	0
				70		
2	15	21	26	25	90	13
	50			25		
3	15	14	15	17	115	2
Demanda	50	60	70	95		
Pesos	2	12	13	12		

Diagrama de compensação no circuito:

- Seta para cima: 15-X (de C para B)
- Seta para esquerda: X (de B para A)
- Seta para baixo: 60-X (de A para B)
- Seta para direita: 55+X (de B para C)

4º passo: escolher para a variável que está sendo transformada em básica (que contém X) o maior valor possível, sem tornar nenhuma variável básica negativa. Esse valor corresponde ao menor valor entre as células do circuito onde o valor de entrada (X) estiver sendo subtraído. Esta nova alocação forma uma nova configuração que pode ser a solução ótima.

	A	B	C	D	Oferta
1	17	20	13	12	70
				70	
2	15	21	26	25	90
	50	15		25	
3	15	14	15	17	115
		45	70		
Demanda	50	60	70	95	

5º passo: voltar ao passo 1 até que a solução seja ótima.

Exercício: complete o exemplo anterior seguindo os passos 1 a 5 até obter a solução ótima.

Engenharias
PESQUISA OPERACIONAL I

	A	B	C	D	Oferta	Pesos
1	17	20	13	12	70	0
				70		
2	15	21	26	25	90	13
	50	15		25		
3	15	14	15	17	115	6
		45	70			
Demanda	50	60	70	95		
Pesos	2	8	9	12		

Identificação da negatividade da variável não básica

	A	B	C	D
1	$17-0-2=15$	$20-0-8=12$	$13-0-9=4$	
2			$26-13-9=4$	
3	$15-6-2=7$			$17-6-12=-1$

Montagem do circuito

	A	B	C	D	Oferta	Pesos
1	17	20	13	12	70	0
				70		
2	15	21	26	25	90	13
	50	15+X		25-X		
3	15	14	15	17	115	6
		45-X	70	X		
Demanda	50	60	70	95		
Pesos	2	8	9	12		

Recalculo dos pesos

	A	B	C	D	Oferta	Pesos
1	17	20	13	12	70	0
				70		
2	15	21	26	25	90	12
	50	40				
3	15	14	15	17	115	5
		20	70	25		
Demanda	50	60	70	95		
Pesos	3	9	10	12		

Identificação da negatividade da variável não básica

	A	B	C	D
1	$17-0-3=14$	$20-0-9=11$	$13-0-10=3$	
2			$26-12-10=4$	$25-12-12=1$
3	$15-5-3=7$			

Verifica-se que não existem mais resultados negativos expressos na tabela anterior, concluindo-se que a solução ótima é:

	A	B	C	D	Oferta
1	17	20	13	12	70
				70	
2	15	21	26	25	90
	50	40			
3	15	14	15	17	115
		20	70	25	
Demanda	50	60	70	95	

UNIDADE 7 – PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

- 7.1 Características – **Material Externo**
- 7.2 Modelos de Otimização de Programação Linear Inteira – **Material Externo**
- 7.3 *Branch and Bound* – **Material Externo**
- 7.4 Programação Dinâmica – **Material Externo**
- 7.5 Análise por Envoltória de Dados - DEA – **Material Externo**

BIBLIOGRAFIA

Ackoff, Russell L. e Sasieni, Maurice W., **Pesquisa Operacional**, 515p, LTC Editora, Rio de Janeiro, 1974.

Agosti, Cristiano, **Pesquisa Operacional**, Universidade Comunitária Regional de Chapecó, Centro Tecnológico, Capturado em 03/02/2004, Disponível em <http://www.geocities.com/miguelgeno/pdf/ApostilaPO.pdf>, Chapecó, Santa Catarina, 2003.

Andrade, Eduardo Leopoldino, **Introdução à Pesquisa Operacional: Métodos e Modelos para Análise de Decisão**, 277p, ISBN 8521614128, LTC Editora, Rio de Janeiro, 2000.

Andrade, Eliana X.L. de, Sampaio, Rubens e Silva Geraldo N., **Introdução à Construção de Modelos de Otimização Linear e Inteira**, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, ISBN 85-7651-021-9, São Carlos – SP, 2005.

Bianchi Neto, Jose e da Silva, Wilson Custódio Canesin, **Simulação**, Universidade Braz Cubas, Mogi das Cruzes, SP, 2002.

Bouyssou, Denis, **Questionner Le Passé De La Recherche Opérationnelle** Pour Préparer Son Avenir, Université de Paris Dauphine, LAMSADE - Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la décision, 17p., Capturado em 26/04/2007, Disponível em <http://www.lamsade.dauphine.fr/cahiers/PDF/BouyssouCahier.pdf>, Paris, 2002.

Campos, Vânia B.G., **Otimização do Transporte**, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 1998

Cintra, Renato J., **Notas de Aula de Programação Linear**, Universidade Federal de Pernambuco, Departamento de Estatística, 2007

da Silva, Alexandre Stamford, **Introdução à Programação Linear – Parte IV**, Elementos de Economia Matemática II, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, 2006.

dos Santos, Mauricio Pereira, **Programação Linear**, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática e Estatística, Rio de Janeiro, 2000.

dos Santos, Mauricio Pereira, **Pesquisa Operacional**, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática e Estatística, Rio de Janeiro, 2003.

Frederico Rodrigues Borges da Cruz, **Simulação de Sistemas**, Departamento de Estatística, Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, Belo Horizonte, 2002.

Goldberg, Marco César e Luna, L.Henrique Pacca, **Otimização Combinatória e Programação Linear: Modelos e Algoritmos**, Editora Campus, 649 p., ISBN 85-352-0541-1, Rio de Janeiro, 2000.

Gomes, Luiz Flavio Autran Monteiro; Gomes, Carlos Francisco Simões e Almeida, Adiel Teixeira, **Tomada de Decisão Gerencial: Enfoque Multicritério**, 264p, ISBN 852243113-2, Editora Atlas, São Paulo, 2002.

Bressan, Graça, **Modelagem e Simulação de Sistemas Computacionais**, Laboratório de Arquitetura e Redes de Computadores – LARC, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – USP, São Paulo, 2002.

Honigbaum, G., **Uma Contribuição ao Estudo de Confiabilidade e Disponibilidade em Sistemas de Transporte Metro-Ferroviários**, Dissertação de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

Lachtermacher, Gerson, **Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões: Modelagem em Excel**, 384p, ISBN 85-352-1492-5, Editora Campus, Rio de Janeiro, 2004.

Lima Jr., Orlando F. e Barbosa, Paulo, **Tópicos sobre Otimização e Planejamento e Análise de Sistemas de Transportes**, Fac. Eng. Civil – UNICAMP, 2004.

Lisboa, Erico Fagundes Anicet, **Pesquisa Operacional**, Capturado em 18/03/2004, Disponível em <http://www.ericolisboa.eng.br/cursos/apostilas/po/index.htm>, Rio de Janeiro, 2002.

Montevechi, José Arnaldo Barra, **Pesquisa Operacional – Programação Linear**, Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Minas Gerais, 2000.

Neumann, Donald, **Métodos Quantitativos I: Análise de Sensibilidade**, Universidade Federal do Paraná – UFPR, Curitiba - PR, 2007

Nogueira, Fernando Marques de Almeida, **Programação Linear**, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora – MG, 2007.

Pereira, A.L., **Teoria Geral de Sistemas - Apontamentos de Disciplina**, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

Pontes, M.V.V., **Uma Contribuição ao Estudo de Confiabilidade e Segurança de Sistemas de transporte Metro-Ferroviários**, Dissertação de Mestrado, COOPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1991.

Silva, Tânia Cordeiro Lindbeck da. **Nova Metodologia para Resolução de Problemas de Transporte em Casos Esparsos**. Tese Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2012.

Smiderle, Andreia, **Técnicas da Pesquisa Operacional Aplicadas – Um Problema de Cobertura de Arcos**, Dissertação de Mestrado (Métodos Numéricos em Engenharia), Universidade Federal do Paraná, 153f., Curitiba, 2001.

Sousa, José Joaquim e Stefani, Lúcia, **Programação Linear**, Centro universitário Monte Serrat – Unimonte, Santos SP, (s/d)

Sucena, Marcelo Prado e Pereira, Amaranto Lopes, **Modelo Conceitual Simbólico Para Subsidiar a Análise Sistêmica do Desempenho dos Subsistemas Fixos dos Sistemas de Transportes Sobre Trilhos** in III Rio de Transportes, Rio de Janeiro, 2005.

Vetorazzi Jr., Carlos Norberto, **Pesquisa Operacional - Notas de Aula**, Universidade do Estado de Santa Catarina – UDES, Departamento de Ciência da Computação.